Seria 4. Funkcje charakterystyczne

1. Oblicz funkcje charakterystyczne rozkładów dyskretnych:
   - 1-punktowy δ_a, $a \in \mathbb{R}$;
   - 2-punktowy $p\delta_a + q\delta_b$, $p + q = 1$;
   - Poissona, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$;
   - geometryczny $\mathrm{Geom}(p)$;
   - Bernoulliego $\mathcal{B}(n, p)$.
   - ujemny dwumianowy $\mathbf{P}(X = k) = \binom{\alpha+k-1}{k}(1-p)^k p^\alpha$, $k = 0, 1, 2, ..., p \in (0, 1)$, $\alpha > 0$.
2. Znajdź funkcje charakterystyczne rozkładów ciągłych:
   - jednostajny $\mathcal{U}([0, a])$, $\mathcal{U}([-a, a])$;
   - Cauchy'ego $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$;
   - Gamma $\Gamma(a, b)$;
   - Gussowsski $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
3. Rozstrzygnij czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi i podaj odpowiedni rozkład (w przypadku pozytywnym):
$$a)\ \cos(t),\ \ b)\ \cos^2(t),\ \ c)\ \frac{1}{4}(1+e^{it})^2,\ \ d)\ \frac{1+\cos(t)}{2},\ \ e)\ (2-e^{it})^{-1}.$$
4. Udowodnij, że kombinacja wypukła przeliczalnej rodziny funkcji charakterystycznych jest funkcją charakterystyczną.
5. Niech $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ będą niezależne o tym samym rozkładzie, N-niezależna zmienna o rozkładzie Poissona, $\mathcal{P}(\lambda)$. Wyznacz funkcję charakterystyczną $X_1 + X_2 + ... + X_N$.
6. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Rozstrzygnąć, czy
$$a)\ \varphi^2\ \ b)\ \mathrm{Re}\varphi\ \ c)\ |\varphi|^2\ \ d)\ |\varphi|,$$
   są funkcjami charakterystycznymi.
7. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X oraz $X + Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnić, że Y ma rozkład normalny lub jest stała p.n.
8. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, 1)$ a Y ma rozkład zadany przez
$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{n},\ \ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$
   Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.
9. Zmienne $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym zmienna $X_1+X_2+...+X_n$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennych X_i.
10. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(-1, 1)$. Czy istniej niezależna od niej zmienna Y taka, że rozkłady zmiennych $X + Y$ oraz $\frac{1}{2}Y$ są takie same.
11. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze. Udowodnij że $\mathbf{E}X^2 < \infty$.
12. Niech X przyjmuje wartości całkowite. Udowodnić, że
$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$
13. Twierdzenie Lebesgue'a. Udowodnij, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\varphi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.