Seria 14. Łańcuchy Markowa.

1. W grze planszowej (o stanach $1, 2, 3$) macierz przejścia zadana jest wzorem

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

   Ile średnio trzeba gier by przejść ze stanu 1 do stanu 2.

2. Czy jeśli $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa, to dla dowolnych zbiorów $A_n, ..., A_0 \in \mathcal{B}$ zachodzi

$$\mathbf{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}, ...X_0 \in A_0) = \mathbf{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}).$$

3. Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia w której wszystkie wiersze są identyczne. Pokaż, że zmienne $X_0, X_1, X_2, ...$ są niezależne.

4. Dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ startującego z x pokazać, że $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \ X_n \neq i\}$. Udowodnić, że τ ma rozkład geometryczny.

5. Rozważmy błądzenie pod Z^2. Z każdego stanu można przejść do sąsiada z p-stwem $\frac{1}{4}$. Pokazać, że jest to łańcuch powracalny, znaleźć jego miarę stacjonarną i udowodnić, że nie istnieje rozkład stacjonarny.

6. W modelu dyfuzji z $n = 20$ załóżmy, że w chwili początkowej 0 nie ma żadnej cząstki w pojemniku I. Wyznaczyć przybliżone p-stwo, że w chwili 10000 nie będzie żadnej cząstki pojemniku I.