

Seria 13. Łańcuchy Markowa.

- Po wierzchołkach pięciokąta $ABCDE$ porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A , a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z p-stwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć
 - p-stwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C ,
 - wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A .
- Udowodnić, że w zagadnieniu ruiny średni czas oczekiwania wynosi ab .
- Naukowiec mający r parasoli wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (p-stwo p), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (p-stwo $q = 1 - p$). Niech stanem łańcucha będzie liczba parasoli znajdujących się pod ręką bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy. Skonstruować macierz przejścia i znaleźć rozkład stacjonarny. Znaleźć przybliżone p-stwo, że naukowiec zmoknie w danym (odległym) dniu, a następnie wykazać, że 5 parasoli zabezpiecza w (95%) przed zmoknięciem.
- Udowodnić, że jeśli łańcuch Markowa jest powracający, to $\mathbf{P}_x(\tau_y < \infty) = 1$ dla każdego stanu x, y .
- Niech łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ma macierz przejścia postaci $P(0, 1) = p_0$, $P(0, 0) = 1 - p_0$, $P(n, n + 1) = p_n$, $P(n, 0) = 1 - p_n$. Kiedy ten łańcuch jest powracający, a kiedy chwilowy?
- Czy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

jest łańcuchem okresowym?

- Udowodnić, że jeśli dla macierzy przejścia nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieje x takie, że $P(x, x) > 0$, to łańcuch nie jest okresowy.
- W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6, w pudełku B ani jednej. Wykonano 100000 rzutów kostką i po każdym rzucie przekładano kule z wylosowanym numerem do drugiego pudełka. Jaka jest mniej więcej szansa, że pudełko B jest puste?
- Znaleźć wszystkie rozkłady stacjonarne dla łańcucha Markowa o macierzy przejścia

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{array} \right\}$$

- Udowodnić, że jeśli π jest rozkładem stacjonarnym oraz x nie jest stanem powracającym dodatnim, to $\pi(x) = 0$.