Seria 11. Martyngały

1. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi losowymi o średniej 0 spełniającymi warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Var} X_n < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n.

2. Udowodnić, że dla podmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ i dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność
$$t\mathbf{P}(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \leqslant -t) \leqslant \mathbf{E} X_n 1_{\{\min_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k > -t\}} - \mathbf{E} X_0 \leqslant \mathbf{E} X_n^+ - \mathbf{E} X_0.$$

3. Udowodnić, że dla podmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ i dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność
$$t\mathbf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k| \geqslant t) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{E}|X_k|.$$

4. Wykazać, że dla nadmartyngału $(X_k)_{k=1}^n$ i dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność
$$t\mathbf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k| \geqslant t) \leqslant K \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{E}|X_k|,$$
przy czym $K = 1$ jeśli X_k jest martyngałem lub ma stały znak oraz $K = 3$ w ogólnym przypadku.

5. Nierówność Dooba. Niech $(X_k)_{k=1}^n$ będzie martyngałem, $p > 1$. Zachodzi
$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k|^p \leqslant (\frac{p}{p-1})^p \mathbf{E}|X_n|^p.$$

6. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie martyngałem, $X_0 = 0$. Udowodnić, że jeśli istnieją stałe c_n takie, że $\mathbf{P}(|X_n - X_{n-1}| \leqslant c_n) = 1$, to
$$\mathbf{P}(X_n > t) \leqslant \exp(-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}).$$

7. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbf{P} = |\cdot|$, a f funkcją borelowską całkowalną względem miary Lebesgue'a. Rozważmy, że ciąg zstępujący podziałów $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie π_n jest zadany przez $(t_j^{(n)})_{j=0}^{k_n}$, $t_0^{(n)} = 0$, $t_{k_n}^{(n)} = 1$. Udowodnić, że
$$X_n(\omega) = \frac{1}{t_j^n - t_{j-1}^n} \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} f(x)dx, \quad \omega \in [t_{j-1}^n, t_j^n)$$
jest zbieżny p.n. do f.