

Seria 10. Martyngały

1. Niech τ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}([0, 1])$. Niech $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_1 + \dots + X_n \geq 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.
2. Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć średnią wartość uzyskanej sumy oczek.
3. Niech $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Bernoulliego. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$ oraz

$$Z_n = \exp(\alpha(U_1 + \dots + U_n) - n\alpha^2/2).$$

Pokaż, że Z_n jest nadmartyngałem. Zbadaj zbieżność p.n. i w L_1 .

4. Udowodnij, że dla zmiennych Bernoulliego $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_1 + \dots + U_n|}{\sqrt{2n \log n}} \leq 1, \text{ p.n.}$$

5. Tożsamość Walda $\mathbf{E}(X_1 + \dots + X_\tau) = \mathbf{E}X_1 \mathbf{E}\tau$, jeśli X_1, \dots, X_n są niezależne o tej samej średniej.
6. Niech (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przy czym $X_n \geq 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}X_n = 1$. Dodatkowo, załóżmy, że X_n nie są skoncentrowane w 1. Udowodnić, że $X_1 X_2 \dots X_n \rightarrow 0$ p.n.

7. (Model Polya) Urna zawiera b kul białych i c czarnych. Losujemy kulę i zwracając dokładamy m kul tego samego koloru. Niech b_n, c_n oznaczają liczbę białych kul i liczbę czarnych. Niech X_n oznacza frakcję kul czarnych $\frac{c_n}{b_n + c_n}$, natomiast $Y_n = 1$ jeśli w n -tym losowaniu wyciągnięto czarną kulę, 0 jeśli białą (dodatkowo $Y_0 = 1$). Pokaż, że (X_n) jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n)$. Wykaż, że X_n jest zbieżny do zmiennej granicznej X oraz udowodnij, że $\mathbf{E}X = \frac{c}{b+c}$.

8. (Zadanie o Studentcie) Student zna odpowiedź na m spośród n pytań, $m < n$. Jaka optymalną (ze względu na szansę wylosowania pytania na które zna odpowiedź) strategię wejścia do pokoju w którym profesor kolejno egzaminuje n studentów powinien przyjąć?
9. W pojemniku jest znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, może albo zniknąć z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, albo podzielić się na trzy cząstki z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem jeden, po pewnym czasie nie będzie w pojemniku ani jednej cząstki.

10. Niech $-\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$. Niech $(X_{-n})_{-n \in -\mathbb{N}}$ będzie nadmartyngałem względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_{-n})_{-n \in -\mathbb{N}}$ takim, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}X_{-n} < \infty.$$

Pokaż, że $(X_{-n})_{-n \in -\mathbb{N}}$ jest rodziną jednostajnie całkowalną. W szczególności każdy martyngał z czasem odwróconym jest zbieżny p.n.

11. Pokaż, że w sytuacji poprzedniego zadania $(X_{-n})_{n \rightarrow \infty}$ jest zbieżny p.n. do X nadto

$$X = \mathbf{E}(X_0 | \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{-k}).$$