Seria 1. Zbieżność miar

1. Udowodnij, że zbieżność według prawdopodobieństwa pociąga zbieżność według rozkładu.
2. Pokaż, że istnieją ciągi zmiennych losowych zdefiniowane na tej samej przestrzeni probabilistycznej, które zbiegają według rozkładu ale nie zbiegają według prawdopodobieństwa.
3. Pokaż, że jeśli ciąg zmiennych zbiega według rozkładu do stałej, to zbiega również według prawdopodobieństwa.
4. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $a, b \in \mathbb{R}$, to $aX_n + b \xrightarrow{d} aX + b$.
5. Znajdź przykład ciągu zmiennych zbieżnego według rozkładu, którego dystrybuanty nie są punktowo zbieżne do dystrybuanty zmiennej granicznej.
6. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych ciągłych, których dystrybuanty są punktowo zbieżne ale których gęstości nie zbiegają punktowe.
7. Udowodnij twierdzenie Scheffe'ego. Niech miary probabilistyczne μ_n, $n = 1, 2, ...$ oraz miara probabilistyczna μ mają gęstości względem pewnej miary ν to znaczy $\mu_n(A) = \int_A f_n d\nu_n$ oraz $\mu(A) = \int_A f d\nu$ dla $A \in \mathcal{B}$. Pokaż, że ze zbieżności $f_n \to f$ prawie wszędzie względem ν wynika silna zbieżność μ_n do μ, to znaczy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{B}} |\mu_n(A) - \mu(A)| = 0$$

   Pokaż na odwrót, że z powyższej zbieżności wynika zbieżność prawie wszędzie gęstości f_n do f.
8. Niech miary μ_n, $n \geqslant 0$ będą skupione na zbiorze liczb naturalnych. Pokaż, że $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_n(\{k\}) \to \mu(\{k\})$ dla każdego k naturalnego.
9. Pokaż, że słaba zbieżność ciągu miar na zbiorze dyskretnym S bez punktów skupienia jest równoważna temu, że $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{s\}) = \mu(\{s\})$ dla każdego $s \in S$.
10. Pokaż, że ze słabej zbieżności rozkładów $\mu_{X_n} \xrightarrow{*} \mu_X$ wynika ciasność rodziny $(\mu_{X_n})_{n=1}^{\infty}$.
11. Pokaż, że rodzina miar $\mu_\alpha \sim \mathcal{N}(m_\alpha, \sigma_\alpha^2)$, $\alpha \in \Lambda$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K > 0$ takie, że $|m_\alpha| \leqslant K$ oraz $\sigma_\alpha^2 \leqslant K$ dla każdego $\alpha \in \Lambda$.
12. Niech X_n będzie pierwsza współrzędną zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na kuli w jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.
13. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $\mathbf{E}X^+ = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^+ = \infty$.
14. Udowodnij, że ciąg zmiennych X_n jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n| > K) = 0.$$

15. Udowodnij, że ciąg zmiennych X_n jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy $c_n X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ dla dowolnego ciągu liczb nieujemnych (c_n) takiego, że $c_n \to 0$.