Seria 9. Martyngały

1. Niech (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przy czym $X_n \geqslant 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}X_n = 1$. Dodatkowo, załóżmy, że X_n nie są skoncentrowane w 1. Udowodnić, że $X_1X_2...X_n \to 0$ p.n.

2. Dany jest ciąg (ε_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkladzie $\mathbf{P}(\varepsilon_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$. Udowodnic, że ciąg

$$Z_n = \exp(a(\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n) - (na^2/2)),$$

gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią, jest nadmartyngałem $(\mathcal{F}_n)$. Zbadać jego zbieżność prawie na na pewno i w L^1.

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne , przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$. Niech $S_1 = 0$ p.n., $S_n = X_1X_2 + X_2X_3 + ... + X_{n-1}X_n$ dla $n \geqslant 2$. Ponadto niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$, $n \geqslant 1$. Wykazać, że $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem $(S_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, który jest zbieżny p.n. przy $n \to \infty$.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem n. Wyznaczyć tak ciąg liczbowy (α_n), by ciąg

$$Y_n = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

był martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ...)$. Czy ten martyngał jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L_1? Czy jest zbieżny L_2?

5. W pojemniku jest znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, może alno zniknąć z prawodopodbieństwem $\frac{2}{3}$, albo podzieleć się na trzy cząstki z prawodopodbieństwem $\frac{1}{3}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem jeden, po pewnym czasie nie będzie w pojemniku ani jednej cząstki.