Seria 8. Twierdzenie Berry-Essena

1. Pokaż, że zmienna losowa X o rozkladzie trojkątnym na odcinku $(-T, T)$ o gęstości $(1-|x|/T)/T$ dla $|x| \leqslant T$ oraz 0 wpp ma funkcję charkaterystyczną $(\sin(tT/2)/(tT/2))^2$. Udowodnij, że
$$\frac{1}{T}(1-\frac{|x|}{T}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{4\sin^2(tT/2)}{(tT)^2}dt.$$
Zauważ, że zmienna Z_T o gęstości $\frac{1-\cos xT}{\pi T x^2}$ ma funkcję charakterystyczną $1-\frac{t}{T}$, $|t|| \leqslant T$.

2. Niech U, V będą zmiennymi losowymi o dystrybuantach F_U, F_V i funkcjach charakterystycznych φ_U, φ_V. Niech Z_T bedzie zmienna niezależną od U, V. Pokaż, że zmienne $U+Z_T$, $V+Z_T$ są absolutnie ciągłe (mają gęstosci f_{U+Z_T}, f_{V+Z_T}) oraz udowodnij równość
$$f_{U+Z_T}(x) - f_{V+Z_T}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itx}(\varphi_U(t)-\varphi_V(t))\varphi_{Z_T}(t)dt.$$

3. Udowodnij, że
$$\sup|F_{U+Z_T}(x) - F_{V+Z_T}(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}|\frac{\varphi_U(t)-\varphi_V(t)}{t}|dt.$$

4. Pokaż, że
$$\mathbf{P}(|Z_T| > \frac{\triangle}{2A}) \leqslant \frac{8A}{\pi\triangle T}.$$

5. Sprawdź, że
$$F_{U+Z_T}(x) - F_{V+Z_T}(x) = \int (F_U(x-y) - F_V(x-y))f_{Z_T}(y)dy.$$

6. Wykaż, że jeśli $\triangle = \sup_{x\in\mathbb{R}}|F_U(x) - F_V(x)|$, $\triangle_T = \sup_{x\in\mathbb{R}}|F_{U+Z_T}(x) - F_{V+Z_T}(x)|$ oraz $A = \sup_{x\in\mathbb{R}} F_V'(x)$, to
$$\triangle \leqslant 2\triangle_T + \frac{24A}{\pi T}.$$

7. Pokaż, że
$$\mathbf{P}(|Z_T| > \frac{\triangle}{2A}) \leqslant \frac{8A}{\pi\triangle T}.$$

8. Niech U, V będą zmiennymi losowymi o dystrybunatach $F_U, F?V$ i funkcjach charakterystycznych φ_U, φ_V. Niech nadto F_V będzie różniczkowalne oraz $A = \sup_{x\in\mathbb{R}} F_V'(x)$. Pokaż, że zachodzi nierównosć
$$|F_U(x) - F_V(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}|\frac{\varphi_U(t)-\varphi_V(t)}{t}|dt + \frac{24A}{\pi T}.$$

9. Wykaż twierdzenie Berry Essena. Jeśli X_n będą niezaleznymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie takimi, że $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = \sigma^2$ oraz $p^3 = \mathbf{E}|X|^3 < \infty$, to
$$|F_n(x) - G(x)| \leqslant C\frac{p^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$
gdzie F_n jest dystrybuantą $X_1 + ... + X_n$, a G jest dystrybuantą w rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

10. Pokaż na przykladzie zmiennych Bernouliego, że tempo zbieżności w Twierdzeniu Berry Essena niemoże zostac poprawione bez dodatkowych założeń. Udowodnij, że dla U_k, $\mathbf{P}(U_k = \pm 1) = 1/2$, mamy
$$|\mathbf{P}(U_1 + ... + U_{2n} < 0) - \frac{1}{2}| \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}.$$

11. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Czy można oszacować $|e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} - \frac{1}{2}|$?

12. Niech X będzie zmienna losową spełniająca $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz jeśli Y, Z są niezależnymi kopiami X, to $X \simeq \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$. Pokaż, że X ma rozkład normalny.