Seria 7. CLT

1. Niech $n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2}$. Pokaż, że

$$\frac{d^k}{dx^k} n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (-iy)^k e^{-y^2/2} dy$$

dla $k = 1, 2, \ldots$. Definujemy wielomiany Hermite'a

$$\frac{d^k}{dx^k} n(x) = (-1)^k H_k(x) n(x).$$

Sprawdź, że

$$H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x.$$

Udowodnij, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{matrix} 0 & \text{dla} & m \neq n, \\ n! & \text{dla} & m = n. \end{matrix}$$

2. Udowodnij nierowność dla $n = 1, 2, \ldots$, $t > 0$

$$|e^{it} - 1 - \frac{it}{1!} - \ldots - \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}| \leqslant \frac{t^n}{n!}.$$

3. Niech $S_n = X_1 + \ldots X_n$, gdzie X_k niezależne oraz $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}X_k^2 = \sigma_k^2$. Zatem $\mathbf{E}S_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$ oraz $\mathbf{E}S_n = 0$. Powiemy, że spełniony jest warunek Lindeberga jeśli

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k|^2 1_{|X_k| \geqslant ts_n} \to 0, \quad n \to \infty$$

dla każdego $t > 0$. Pokaż, że zmienne niezależne o tym samym rozkładzie, średniej 0 i skończonej wariancji spełniają warunke Lindeberga.

4. Udowodnić, że warunek Lapunowa: dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ i dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi $\mathbf{E}|X_k|^{2+\delta} < \infty$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k - \mathbf{E}X_k|^{2+\delta} = 0,$$

pociąga za sobą warunek Lindeberga.

5. Udowodnić, że gdy $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $|X_k| \leqslant K < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ oraz $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}^2 X_k \to \infty$, to ciąg (X_k) spełnia warunek Lindeberga.

6. Pokaż, że warunke Lineberga implikuje w szczegolności, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla każdego $n > N$

$$\frac{\sigma_k}{s_n} \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

7. Niech φ_k będzie f.ch. zmiennej $X_k>$ Pokaż, że

$$\varphi_k(\frac{t}{s_n}) - 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2s_n^2} = \int_{\mathbb{R}} (e^{itx/s_n} - 1 - \frac{itx}{s_n} + \frac{t^2 x^2}{2s_n^2}) \mu_k(dx).$$

8. Pokaż, że

$$|\varphi_k(\frac{t}{s_n}) - 1| \leqslant \frac{t^2 \sigma_k^2}{2s_n^2} \leqslant \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

9. Z rowzinięcia Taylora wydedukuj:

$$\sum_{k=1}^{n} |\log(1+z_k) - z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |z_k|, \quad |z_k| \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

10. Biorąc $z_k = \varphi_k(t/s_n) - 1$ pokaż z poprzedniej nierówności, że

$$-\sum_{k=1}^{n} \log \varphi_k(\frac{t}{s_n}) \simeq \sum_{k=1}^{n} (1 - \varphi_k(t/s_n))$$

gdy $n \to \infty$.

11. Pokaż, że na przedziale $|x| \leqslant r s_n$ mamy ograniczenie

$$|e^{itx/s_n} - 1 - \frac{itx}{s_n} + \frac{t^2 x^2}{2 s_n^2})| \leqslant \frac{|tx|^2}{s_n^3} \leqslant \frac{r |t^3| x^2}{s_n^2}.$$

12. Pokaż, że na przedziale $|x| > r s_n$ mamy ograniczenie

$$|e^{itx/s_n} - 1 - \frac{itx}{s_n} + \frac{t^2 x^2}{2 s_n^2})| \leqslant \frac{t^2 x^2}{s_n^2}$$

13. Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(t/s_n) - 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2 s_n^2}| \leqslant r|t|^3 + |t|^2 \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{|x| > r s_n} x^2 \mu_k(dx).$$

Wywinoskuj stąd twierdzenie Lindeberga, że rozklady znormalizowane S_n/s_n zmierazają do rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.