Seria 6. Funkcje charakterystyczne

1. Niech $F(x)$ bedzie dystrbuantą zmiennej losowej X, a φ jej funkcją charakterystyczną. Załóżmy, że $\mathbf{E}X^2$ istnieje oraz $\mathbf{E}X^2 \neq 0$. Dowieść, że funkcjonał $\psi(t) = -\varphi''(t)/\mathbf{E}X^2$.

2. Niech dla zmiennej losowej X istnieją wszystkie momenty $a_k = \mathbf{E}X^k$, $k = 1, 2, 3, ...$ Znaleźć gęstość $f(x)$ zmiennej loswej X w jednym z dwóch przypadków:

   (a) $a_k = \delta/(\delta + k)$, $\delta > 0$, $k = 1, 2, 3, ...$

   (b) $a_k = (n + k)!/k!$, $k = 1, 2, 3, ...$

   Niech zmienna losowa X ma rozkład $\Gamma(a, b)$. Znajdź funkcję charakterystyczną w tym rozkładzie. W szczególności zanajdź f.ch. dla rozkladu χ^2.

3. Niech funkcja charakterystyczna ma dla pewnego $t_0 \neq 0$ wartość $|\varphi(t_0)| = 1$. Dowieść, że X ma rozkład kratowy o kroku $h = 2\pi/t_0$.

4. Udowdnić, że jesli zmienna X ma gęstość to $\varphi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.

5. Pokaż, że
$$\frac{\sin t}{t} = (\prod_{n=0}^{\infty} \cos \frac{t}{2^{2n-1}})(\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^{2n}}),$$
   udowodnić, że splot rozkładów singularnych może być rozkladem ciągłym.

6. Pokaż wzór
$$\mu(\{c\}) = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-ics} \varphi(s) ds.$$

7. Oblicz granicę
$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |\varphi(s)|^2 ds.$$
   Wywnioskuj że rozkład p-stwa jest bezatomowy wtedy i tylko wtedy gdy powyższa granica jest równa 0.

8. Pokaż oszacowanie:
$$\mu(\{x : \ |x| \geqslant r\}) \leqslant \frac{r}{2} \int_{-2/r}^{2/r} (1 - \varphi_\mu(t)) dr, \quad r > 0.$$
   oraz
$$\mu([-r, r]) \leqslant 2r \int_{-1/r}^{1/r} |\varphi_\mu(t)| dt, \quad r > 0.$$