

Seria 5. Funkcje charakterystyczne

1. Czy są funkcjami charakterystycznymi:

- (a) φ^2
- (b) $\operatorname{Re}\varphi$
- (c) $|\varphi|^2$
- (d) $|\varphi|$.

2. Czy są funkcjami charakterystycznymi:

- (a) $\cos t$
- (b) $\cos^2 t$
- (c) $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$
- (d) $(2 - e^{it})^{-1}$.

3. Pokaż, że jeśli $\sum p_i = 1, p_i > 0$, to $\sum_i p_i \varphi_i$ jest funkcją charakterystyczną, jeśli φ_i były.
4. Udowodnij CTG w przypadku, gdy X_1, X_2, \dots , jest ciągiem i.i.d takim, że $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{D}^2X_1 = 1$. To znaczy, korzystając z funkcji charakterystycznych pokaż, że $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X$, gdzie X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.
5. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X, a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, to $a_n X_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b$.
6. Pokaż, że jeśli funkcja charakterystyczna ma drugą pochodną w zerze to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.
7. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X_0, Y_n \xrightarrow{d} Y_0$, gdzie X_n, Y_n są niezależne, to $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X_0 + Y_0$.
8. Pokaż, że jeśli $X = \sum_{n=0}^{\infty} U_n/2^n$, gdzie U_n jest ciągiem i.i.d Bernoulliego, to X ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$.
9. Pokaż, że jeśli zmienna X o rozkładzie normalnym jest sumą dwóch zmiennych niezależnych Y i Z , to Y, Z mają rozkład normalny.
10. Pokaż, że $\varphi(x) = \frac{2}{1+e^{x^2}}$ nie jest funkcją charakterystyczną.
11. Udowodnić, że $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$, dla $\alpha > 2$ nie jest funkcją charakterystyczną.
12. Udowodnić, że każda funkcja φ przysta, przedziałami liniowa, wypukła na $[0, \infty)$ i taka, że $\varphi(0) = 1$ jest funkcją charakterystyczną.
13. Udowodnić, że każda funkcja φ przysta, wypukła na $[0, \infty)$ i taka, że $\varphi(0) = 1$ jest funkcją charakterystyczną. W szczególności $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$, $\alpha \leq 1$ jest funkcją charakterystyczną.
14. Na odcinek $[-n, n]$ rzucono losowo (zgodnie z rozkładem jednostajnym) n gwiazd o masach jednostkowych. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu sił grawitacji w punkcie 0 ($r/|r|^{\beta+1}$). Dla jakich β istnieje rozkład graniczny (przy $n \rightarrow \infty$)

Definition 1 Niech X, X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie μ . Rozkład μ nazywamy stabilnym, gdy dla każdego n istnieją stałe $a_n > 0$ i b_n , dla których

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim a_n X + b_n.$$

Okazuje się, że $a_n = n^{1/\alpha}$, gdzie $\alpha \in (0, 2]$. Dla danego α rozkład nazywamy α -stabilnym. Np. rozkład Cauchy'ego jest 1-stabilny, rozkład normalny jest 2-stabilny.