Seria 4. Funkcje charakterystyczne

1. Pokaż, że jeśli $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, to ciąg (μ_n) jest jędrny.
2. Wykaż twierdzenie Prochorowa na prostej rzczywistej.
3. Udowodnij, że ciąg $\{X_n\}$ zmajoryzowany przez zmienną Y (tzn. $|X_n| \leqslant Y$) calkowalną $\mathbf{E}Y < \infty$ jest jednostajnie całkowalny.
4. Pokaż, że jeśli ciąg zmiennych $\{X_n\}$ jest jednostajnie całkowalny i zbieżny wedlug p-stwa to jest zbiezny w L_1. Czy zachodzi tw przeciwne?
5. Pokaż, że jesli $X_n \xrightarrow{d} X$ oraz $\{X_n\}$ jest jednostajnie całkowalny, to $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n \to \mathbf{E}X$.
6. Pokaż, że przy odpowiednich załozeniach można skorzystać do oblicznia wartości w p-stwa k braków w n-podpróbce dla a dobrych i b wybrakowanych elementów (rozkład hipergeometryczny) ze wzoru de Moivrea Laplace'a.
7. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru A borelowskiego na $\mathbb{R}^n$ oraz dowolnej miary ν probablistycznej mamy nastepująca rowność
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu_{Leb}(dy)\nu(A-y) = \mu_{Leb}(A).$$
8. Znajdź funkcje charakterystyczną dla rozkłdów:
   (a) Jednostajnego $\mathcal{U}([0,a])$, $\mathcal{U}([-a,a])$;
   (b) Cuchy'ego $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$,
   (c) Gamma $\Gamma(a,b)$.

   Pokaż, że funkcja charakterystyczna ma nastepujace własności
   (a) $\varphi_X(0) = 1$;
   (b) $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$;
   (c) $\varphi_X(T) = \overline{\varphi_X(-t)}$;
   (d) $\varphi_X(t)$ jest jednostajnie ciągła.
9. Pokaż, że jeśli $\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ to $\mu = \nu$.
10. Niech X, Y, U, V będą z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$. Oblicz funkcje charaketrystyczne rozkladów
    (a) XY
    (b) X^2
    (c) X/Y
    (d) $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$
    (e) $XY + UV$.
11. Oblicz funckcję charakterystczną rozkladu $\chi^2(n)$.