**Seria 3. Zbieżność rozkładów.**

1. Niech $\mu_n$ będzie ciągiem rozkładów Bernouliego o parametrach $(n, p_n)$, taki, że $np_n \to \lambda$. Pokaż, że $\mu_n \to \mu$, gdzie $\mu$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda$.

2. Pokaż następujące własności zbieżności rozkładów

   (a) jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} c$ to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$.

   (b) jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} Y$ to niekoniecznie $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

   (c) jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} a$ to $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$.

3. Pokaż, że jeśli $X_n Y_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} 0$, $f$ jest funkcją różniczkowalną w zerze, to $X_n(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{D} f'(0)X$.

4. Pokaż przykład ciągu zmiennych losowych, określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $\Omega$ zbieżnego według rozkładu, który nie jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

5. Podaj przykład

   (a) ciągu dystrybuant, który jest punktowo zbieżny, ale odpowiednie gęstości nie są zbieżne.

   (b) ciągu dystrybuant, który jest punktowo zbieżny, ale odpowiednie momenty nie są zbieżne.

6. Niech $X_1, X_2, ..$ będą zmiennymi niezależnymi o tym samym rozkładzie. Oznaczmy $S_n = X_1 + ... + X_n$. Jeśli $a_n^{-1} S_n - b_n$ ma rozkład graniczny skupiony w jednym punkcie oraz $a_n > 0$, to $a_n \to \infty$ oraz $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to 1$.

7. Niech $\mu_1, \mu_2, ...$ będą miarami skupionymi na $\mathbb{N}$. Pokaż, że

$$\mu_n \xrightarrow{D} \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu_n(\{k\}) \to \mu(\{k\}),$$

   dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

8. Niech $\mu_1, \mu_2, ...$ będą miarami probabilistycznymi skupionymi na zbiorze przeliczalnym $S \subset E$. Udowodnić, że

   (a) jeśli dla każdego $x \in S$ $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \xrightarrow{D} \mu$.

   (b) jeśli każdy punkt $S$ jest izolowany to $\mu_n \to \mu$ implikuje $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$ dla $x \in S$.

   (c) punkt drugi nie jest prawdziwy bez założenia o braku punktów izolowanych.

9. Niech $\mathbf{P}_\alpha = \mathcal{N}(m_\alpha, \sigma_\alpha^2)$. Udowodnij, że rodzina $\{\mathbf{P}_\alpha : \alpha \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K > 0$, że dla wszystkich $\alpha \in I$ jest $|m_\alpha| \leqslant K$, $\sigma_\alpha^2 < K$.

10. Owad i mrówki. Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem $\lambda$. W nocy mrówki kradną mu jaja: szansa, że dane jajo zostanie ukradzione wynosi $q$. Następnego dnia historia się powtarza (liczba jaj ma ten sam rozkład, co poprzedniego dnia i jest niezależna od przeszłości) itd. Jaki jest rozkład graniczny liczby ocalałych jaj.