Seria 2. Zbieżność rozkładów

1. **Twierdzenie Scheffe'go** Niech μ będzie miarą σ-skończoną, f_n, f funkcjami nieujemnymi i takimi, że miary $\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$ są miarami probabilistycznymi. Niech $f_n \xrightarrow{p.n.} f$ względem miary μ. Udwodnić, że

$$\sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| \leqslant \int_\Omega |f - f_n| d\mu \to 0.$$

2. $(*)$ Niech μ, ν będą dwiema miarami probabilistycznymi na $(\Omega, \mathbb{F})$. Zdefiniujmy odległość między tymi miarami w następujący sposób

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Niech dla dowolnej zmiennej X, $(\Omega, \mathbb{F})$ mierzalnej

$$\mathcal{E}_\mu(X) = \mathbf{E}_\mu(X \log X) - \mathbf{E}_\mu(X)(\log \mathbf{E}_\mu X).$$

Przypuśćmy, że mamy zmienną dodatnią X taką, że $d\nu = X d\mu$. Niech $K(\nu, \mu) = \mathcal{E}_\mu(X)$. Udowodnij, że

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leqslant \frac{1}{2} K(\nu, \mu)$$

3. Sprawdzić, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{\frac{k}{n}} \xrightarrow{d} \lambda$, gdzie λ - miara Lebesgue'a na $(0,1)$.

4. Niech $P_\alpha = \mathcal{N}(m_\alpha, \sigma_\alpha)$. Pokaż, że rodzina $\{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje stała C, taka, że

$$|m_\alpha|, |\sigma_\alpha^2| \leqslant C, \quad \forall \alpha \in \Lambda.$$

5. Udowodnić, że $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(m, \sigma)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_n \to m$, $\sigma_n \to \sigma$.

6. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ wówczas $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|^p = \mathbf{E}|X|^p$. Tak jest jesli $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\epsilon} < \infty$.

7. Pokaż, że zbieżność według miary ciągu zmiennych losowych X_n o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej (E, d) implikuje zbieżność według miary.

8. Pokaż, że jeśli ciąg X_n w (E, d) jest słabo zbieżny do stałej c, wówczas również $X_n \xrightarrow{P} c$. Czy musi być zbieżny prawie na pewno?

9. Mamy dany okrąg $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$. Wybieramy liczbę $\alpha \in S^1$, która nie spełnia równania $\alpha^k = 1$ dla żadnego $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dla każedego $n \in \mathbb{N}$, I-Borelowskiego definiujemy miarę

$$\mu_n(I) := \frac{|0 \leqslant k \leqslant n-1 : \alpha^k \in I|}{n}.$$

Pokaż, że $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, gdzie μ jest unormowaną miarą Lebesgue'a na S^1 (jako rozmaitości).

10. $(*)$ Udowodnić, że $X_n \xrightarrow{d} X$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zmienne X_n', X' takie, że $X_n \sim X_n'$, $X \sim X'$ oraz $X_n' \xrightarrow{pn} X'$.

11. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$ oraz przy każdym n zmienne X_n, Y_n są niezależne, wówczas $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$.

12. Niech rozkłady $\mu_1, ..., \mu_n, ...$ będą miarami skupionymi na zbiorze liczb naturalnych. Wykazać, że

$$\mu_n \xrightarrow{d} \mu \iff \forall k \in \mathbb{N} \;\; \mu_n(\{k\}) \to \mu(\{k\}).$$

13. Udowodnić, że jeśli $X_n Y_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} 0$, f jest funkcją różniczkowalną w zerze, to $X_n(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{d} f^{'}(0)X$.

14. **Twierdzenie Cramera** Jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$.

15. $(*)$ Pokazać, że

$$d(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon : F_\mu(t) < F_\nu(t+\epsilon) + \epsilon, F_\nu(t) < F_\mu(t+\epsilon) + \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

definiuje odległość w rozkładach na $\mathbb{R}$, która zadaje słabą zbieżność.