Seria 14 Łańcuchy Markowa.

1. (Model Ehrenfestów) W naczynach I, II rozmieszczono losowo k cząstek. W chwili n losowo wybraną cząstkę przenosi się z naczynia w którym była do drugiego. Jaki jest rozklad stacjonarny.

2. Niech $S = \{1, ..., m\}$, a P macierzą podwójnie stochastyczną, to znaczy $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$, $j = 1, 2, ..., m$. Udowodnić, że rozkład $\pi_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, 2, ..., m$ jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z tą macierzą przejścia.

3. Niech (X_n) będzie łańcuchem okresowym o okresie d z rozkładm stacjonarnym π. Jeżeli $i \in S_l$, $j \in S_{(l+m)(\mod d)}$, to $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nd + m) = F_{ij} d\pi_j$

4. Rozważmy łańcuch Markowa z dwoma stanami i macierzą przejścia

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

   Oba stany są powracające, czy są zerowe?

5. W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany są zerowe lub wszystkie stany są dodatnie.

6. Dla nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieje dokładnie jeden rozkład stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy łańcuch jest powracający dodatni.

7. W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa stan powracający j jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$ dla dowolnego stanu i.

8. W grze planszowej (o stanach $1, 2, 3$) macierz przejścia zadana jest wzorem

$$P = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

   Ile średnio trzba gier by przejść ze stanu 1 do stanu 2.

9. Pchła porusza się pomiędzy psem, kotem, człowiekiem i podłogą. Niezależnie od tego, gdzie jest teraz wybiera następne miejsce pobytu z równymi prawdopodobieństwami. Swoją drogę zaczyna od podłogi. Na psie i kocie może się pożywić, na podlodze głoduje, a na człowieku ginie.

   (a) Jaka jest średnia liczba posiłków pchły przed śmiercią?

   (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, ze pchła zginie na czczo?