Seria 11. Martyngały

1. (Model Polya) Urna zawiera b kul bialych i c czarnych. Losujemy kulę i zwracając dokladamy m kul tego samego koloru. Niech b_n, c_n oznaczają liczbe białych kul i liczbe czarnych. Niech X_n zoancza fakcję kul czarnych $\frac{c_n}{b_n+c_n}$, natomiast $Y_n = 1$ jesli w n-tym losowaniu wyciagnięto czarną kulę, 0 jeśli białą (dodatkowo $Y_0 = 1$). Pokaż, że (X_n) jest martyngalem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$. Wykaż, że X_n jest zbieżny do zmiennej granicznej X oraz udowodnij, że $\mathbf{E}X = \frac{c}{b+c}$.

2. (Zadanie o Studencie) Student zna odpowiedź na m spośród n pytań, $m < n$. Jaką optymalną (ze względu na szansę wylosowania pytania na które zna odpowiedź) strategię wejścia do pokoju w którym profesor kolejno egzaminuje n studentów powinien przyjąć?

3. (Problem n-sekretarek) Mamy n uroczych dziewczyn spośród których chcemy wybrać najlepszą możliwą. Możemy jedynie poznać relatywny porządek wchodzących kolejno kandydatek, to zanczy w momencie gdy k-ta dziweczyna wchodzi do pokoju znamy jej rangę. W momencie gdy kandyatka jest w pokoju musimy podjąć decyzję czy przyjmujemy ją do pracy czy nie. Nie możemy wracać do już odrzuconych dziewczyn. Znajdź strategię maksymalizującą sznsę wyboru najlepszej kandydatki. Mamy zatem zmienne $X_1, ..., X_n$ oznaczające losową permutację. Jedyne co możemy obserwować to zmienne $Y_1, ..., Y_n$ oznaczające relatywną pozycję kolejnych dziewczyn. Chcemy znaleźć strategie τ mierzalne wg filtracji zadanej przez $\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, ..., Y_k)$, które maksymalizują

$$\mathbf{E}1_{X_\tau} = n) = \mathbf{P}(X_\tau = n).$$

Zauważmy, że

$$\mathbf{E}1_{X_k=n} = \mathbf{E}(\frac{k}{n})1_{Y_k=k},$$

a więc de facto maksymalizujemy $\mathbf{E}\frac{\tau}{n}1_{Y_\tau=\tau}$.