Seria 10. Martyngały

1. Pokaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ (filtracja naturalna), to $Z_n = (\frac{q}{p})^{X-1+...+X_n}$ jest martyngałem.

2. Zagadnienie ruiny gracza. Niech (X_i) będą o tym samy rozkładzie $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$. Niech $S_n = X_1 + ... + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \ S_n \in \{-a, b\}\}$. Oblicz $p_1 = \mathbf{P}(S_\tau = -a)$, $p_2 = \mathbf{P}(S_{\tau=b})$.

3. W symetrycznym zagadnieniu ruiny $p = 1 = \frac{1}{2}$ znajdź $\mathbf{E}\tau$.

4. Pokaż, że czas oczekiwania na wygranie $a > 0$ złotych w grze symetrycznej jest nieskonczony.

5. Sprawdź czy
$$(|X_n|^p)_n, \ p \geqslant 1; \ \ (X_n \wedge a)_n; \ \ (X_n \vee a)_n$$
są pod-nad martyngałami.

6. Czy jest $(X_n)_n$ jest podmartyngałem wedlug naturalnej filtracji, to $(|X_n|)_n$ musi być podmartyngałem.

7. Pokaż, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego momentu stopu oraniczonego τ mamy
$$\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0.$$

8. Pokaż, że równość Dooba jest spelniona w szczególności jeśli zmienne $(X_n)_n$ są jednostajnie całkowalne.

9. Niech τ będzie ciągiem niezaleznych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}([0, 1])$. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \ X_1 + ... + X_n \geqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.

10. Rzucamy kostką tak dlugo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć średnią wartosć uzyskanej sumy oczek.