Seria 1. Przybliżenia Rozkładu Normalnego

1. Udowodnij przybliżenie Poissona
$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$
kiedykowliek $p_n n \to \lambda$, $n \to \infty$.

2. Pokaż że zachodzi nastepujący wzór na jakość przyblizenia Poissona
$$|\mathbf{P}(S_n \in B) - \sum_{k \in B \cap \mathbb{N}} \pi_k| \leqslant \frac{\lambda^2}{n},$$
gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$, X_i są zmiennymi z rozkladu Poissona z parametrem p oraz $pn = \lambda$.

3. Wykaż Lokalne Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a
$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq (\frac{n}{2\pi k(n-k)})^{1/2} (\frac{np}{k})^k (\frac{nq}{n-k})^{n-k}.$$

4. Stosując oznaczenie $\delta_k = k - np$ wykaż, że
$$(np + \delta_k)\log(1 + \delta_k/(np)) + (nq - \delta_k)\log(1 - \delta_k/(nq)) = \frac{\delta_k^2}{2n}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \frac{\delta_k^3}{6n^2}(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}) + ...$$
Wywnioskuj stąd, że jeśli $\delta_k^3/n^2 \to 0$, to
$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq (\frac{n}{2\pi(np + \delta_k)(nq - \delta_k)})^{1/2} e^{-\frac{\delta_k^2}{2npq}}.$$

5. Oznaczając $h = (npq)^{-1/2}$, $x_k = \frac{k-np}{(npq)^{1/2}}$ oraz $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ dostajemy
$$|\frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{h\varphi(x_k)} - 1| < \frac{A}{n} + \frac{B|x_k|^3}{n^{1/2}}.$$

6. Zauważ, że $\Phi(x_{k+1/2}) - \Phi(x_{k-1/2}) = h\phi(\xi_k)$, gdzie ξ_k należy do zbioru $x_k - \frac{1}{2}h < \xi_k < x_k + \frac{1}{2}h$. Wywnioskuj stąd, że
$$h\varphi(x_k) = e^{\frac{\xi_k^2 - x_k^2}{2}}(\Phi(x_{k+1/2}) - \Phi(x_{k-1/2})).$$

7. Stosując nierówność
$$\frac{1}{2}|\xi_k^2 - x_k^2| < h(|x_k| + \frac{1}{4}h) < \varepsilon$$
(zakładamy, że $x_k^2 n^{-1/2} \to 0$), udwodnij, że
$$\mathbf{P}(\alpha \leqslant S_n \leqslant \beta) \simeq \Phi(x_{\beta+1/2}) - \Phi(x_{\alpha-1/2}).$$

8. Niech m kin walczy o n klientów (dla suatlenia uwagi $n = 1000$, $m = 2, 3, 4$) oferując im po s miejsc. Jaką należy wybrać wartosć s, żeby ryzyko że klient nie znajdzie w danym kinie miejsca było na poziomie α (np $\alpha = 0,01$).

9. Znajdź p-stwo, ze 7 w 10000 niezależnie wybieranych cyfrach pojawi się 968 razy.

10. Jaka jest szansa, ze 1 oczko wypadnie w 12000 niezaleznych rzutach kośćmi do gry pomiezy 1900, a 2150 razy.

11. Udwodnij nierowność Bernstein'a. Pokaż, że jeśli X_i-niezależne zmienne takie, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $|X_i| \leqslant K$, oraz $\mathbf{E}|X_i|^2 = \sigma^2$, to
$$\mathbf{P}(S_n > t) \leqslant \exp(-\frac{t^2}{2(\sigma^2 n + tK/2)}).$$