Zadania. Seria 1

1. Udowodnij, że dla nieprzywiedlnego łańcucha Markowa o wartościach w przeliczlnej przestrzeni stanów $\mathcal{X}$ jeśli $U(x,x) < \infty$ dla pewnego $x \in \mathcal{X}$, to $U(u,v) < \infty$, dla dowolnych $u, v \in \mathcal{X}$.

2. Pokaż, że w błądzeniu przypadkowym na półprostej, to znaczy $P(0,0) = p$, $P(i, i+1) = q$, $P(i, i-1) = p$ jeśli $q > p$ to $L(0,0) < 1$.

3. Niech $T_1, T_2, T_3, ...$ będą niezależnymi czasami przybywania klientów z rozkładu wykładniczego

   $$\mathbf{P}(T_i > t) = \exp(-\lambda t), \quad t \geqslant 0, \quad \text{gdzie} \quad \lambda > 0.$$

   Onacza to, ze kilenci przybywają w chwilach $T'_i = T_1 + T_2 + ... + T_i$. Niech $S_1, S_2, S_3, ...$ będą niezależymi czasami obsługi kolejnych kilentów (niezależnymi od $(T_i)_{i \geqslant 1}$) z rozkładu wykładniczego

   $$\mathbf{P}(S_i > t) = \exp(-\mu t), \quad t \geqslant 0., \quad \text{gdzie} \quad \mu > 0.$$

   Zauważmy, że w chwilach w których serwer jest pusty żaden kilent nie jest obsługiwany zatem $S'_i = S_1 + S_2 + ... + S_i$ jest zwykle mniejsze niż rzeczywisty czas w którym i-ty klient będzie obsłużony. Niech $N(t)$ oznacza liczbę kilentów w systemie w chwili t. Niech $X_i = N(T_i-)$ oznacza liczbę klientów w systemie tuż przed chwilą T_i (przybyciem i-tego kilenta). Udowodnij, że X_i jest łańcuchem Markowa. Znajdź warunek na λ i μ, który gwarantuje, że istnieje rozkład stacjonarny. Jaki to rozklad?