ZADANIA Z PS1 - 9

1. Sprawdź, że następujące funkcje generują jednorodne łańcuchy Markowa
   (a) (Unifrom Translation) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_t(x, \cdot) = \delta_{x+vt}$.
   (b) (Brownian Motion) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $g_t(y - x) = (2\pi)$, $g_t(y - x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2t})$.
   (c) (Poisson Process) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_t(x, dy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!}\delta_{x+n}(dy)$.
2. Pokaż, że następujące dwie rodziny zdefiniowane na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ są Markowskie.
   (a) $P_t f(x) = \exp(-\frac{t}{x})f(x) + \int_x^\infty ty^{-2} \exp(-\frac{t}{y})f(y)dy$.
   (b) $Q_t f(x) = \frac{x}{x+t}f(x + t) + \int_x^\infty \frac{t}{(t+y)^2} f(t + y)dy$.
3. Niech X będzie procesem Markowa z funkcją przejścia (P_t), a f będzie funkcją ograniczoną. Pokaż, że $(P_{t-s}f(X_s), s \leqslant t)$, jest P_x martyngałem dla każdego x.
4. Pokaż, że secentrowany proces Gaussowski X_t, $t \geqslant 0$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy
$$\Gamma(s, u)\Gamma(t, t) = \Gamma(s, t)\Gamma(t, u)$$
   dla dowolnych $s < t < u$.
5. Pokaż, że jedynym scentrowanym Gaussowskim, stacjonarnym procesem Markowa jest proces Ornstein-Uhlenbeck o funkcji przejścia zadanej przez
$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi c(1 - e^{-2\beta t}))^{1/2}} \exp(-\frac{(y - e^{-\beta t}x)}{2c(1 - e^{-2\beta t})}).$$
6. Pokaż, że proces $|W|$ jest jednorodnym procesem Markowa na $[0, \infty]$ o funkcji przejścia
$$p_t(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}(\exp(-\frac{1}{2t}(y - x)^2) + \exp(-\frac{1}{2t}(y + x)^2)).$$
7. Pokaż, że funkcja przejścia P_t jest fellerowska wtedy i tylko wtedy, gdy $P_tC_0 \subset C_0$ dla każdego t oraz $\lim_{t\to 0} P_tf(x) = f(x)$ dla każdego $f \in C_0$, gdzie C_0 oznacza przestrzeń funkcji ciągłych znikających w zerze.
8. Niech $X_t = W_t$, gdy $W_0 \neq 0$ oraz $X_t = 0$, gdy $W_0 = 0$. Pokaż, że
$$P(t, x, \Gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Gamma e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} & x \neq 0 \\ \delta_0 & x = 0 \end{array} \right\}.$$
   Pokaż, że proces X_t nie jest fellerowski.

9. Udowodnij, że proces Markowa posiada modyfikację cadlag, to znaczy istnieje proces cadlag $\bar{X}_t$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ takie, że $X_t = \bar{X}_t$, $\mathbf{P}_\mu$ p.n. dla każdej miary $\mathbf{P}_\mu$.

10. Wykaż Prawo Zero-Jedynkowe Blumenthala. Dla każdego $B \in \mathcal{F}_{0+}$ i dla każdego $x \in E$ zachodzi $\mathbf{P}_x(B) = 0$ albo $\mathbf{P}_x(B) = 1$.

11. Pokaż, że
$$\mathbf{P}(\sup_{s \leqslant t} B_s \geqslant a) = 2\mathbf{P}(B_t \geqslant a).$$

12. Udowodnij, że dla $x \in E$ oraz $\sigma_x = \inf\{t > 0 : \ X_t \neq x\}$ istnieje stała $a \in [0, \infty]$ zależna od x taka, że
$$\mathbf{P}_x(\sigma_x > t) = e^{-at}.$$

13. Niech $T_a = \inf\{t : \ S_t \geqslant a\}$. Pokaż, że
$$\mathbf{P}(T_a \leqslant t) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{y^2}{2t}) dy.$$