ZADANIA Z PS1 – 7

1. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem w pewnej przestrzeni stanów $(E,\mathcal{B})$. Pokazać, że warunek

$$P(X_{t+s}\in\Gamma|\mathcal{F}_s^X)=P(X_{t+s}\in\Gamma|X_s),\quad \Gamma\in\mathcal{B},\quad s,t\geq 0, \tag{$*$}$$

jest równoważny warunkowi: Dla dowolnych $s\geq 0$, $A\in\sigma(X_t,t\geq s)$, $B\in\sigma(X_t,t\leq s)$,

$$P(A\cap B|X_s)=P(A|X_s)P(B|X_s).$$

Wsk. Pokazać, że $(*)\Rightarrow P(A|\mathcal{F}_s^X)=P(A|X_s)$.

2. ξ_i jest zmienną losową o wartościach w przestrzeni mierzalnej $(E_i,\mathcal{B}_i)$, $i=1,2$. $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem zdarzeń, takim że ξ_1 jest mierzalna względem $\mathcal{G}$, ξ_2 jest niezależna od $\mathcal{G}$, $f:E_1\times E_2\to\mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, ograniczoną (na przykład). Pokazać, że

$$E(f(\xi_1,\xi_2)|\mathcal{G})=\bar{f}(\xi_1),\quad \text{gdzie } \bar{f}(x)=Ef(x,\xi_2).$$

Wsk. Np. można skorzystać z tw. Fubiniego.

3. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Pokazać, że $(|W_t|)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Markowa i znaleźć funkcję przejścia.

4. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Pokazać, że proces Ornsteina-Uhlenbecka $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $U_t=\sigma e^{-\alpha t}W_{e^{2\alpha t}}$, $\quad\alpha,\sigma>0$, jest procesem Markowa i znaleźć funkcję przejścia.

5. Niech $S_0=0$, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ dla $n>1$, $\xi_1,\xi_2,\ldots$ są i.i.d. Pokazać, że następujące procesy nie muszą być procesami Markowa:

(a) $(S_n^+)_{n\in\mathbb{Z}_+}$,

(b) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, gdzie

$$X_t=\begin{cases} S_n & \text{dla } t=n,\ n=0,1,2,\ldots\\ \text{liniowa interpolacja} & \text{dla } t\in(n,n+1),\ n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

6. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $d\geq 3$. Pokazać, że dla każdego $a\in\mathbb{R}^d$

$$\Big(\frac{1}{|W_t-a|^{d-2}},\ \mathcal{F}_t^W\Big)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

jest nadmartyngałem.
Wsk. Zauważyć, że

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}dt=\frac{C}{|x-y|^{d-2}}$$

i skorzystać z równania Chapmana-Kołmogorowa.

7. Korzystając z Zad. 6 pokazać, że dla procesu Wienera w $\mathbb{R}^d$, $d\geq 3$,

a) dla każdego $a\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ $P(\exists_t W_t=a)=0$,

b) $\lim_{t\to\infty}|W_t|=\infty$ p.n.
Wsk. Pokazać, że proces $(\frac{1}{|W_t-a|^{d-2}})_t$ jest nieodróżnialny od procesu ciągłego.