## ZADANIA Z PS1 - 7

1. Niech $(X_t)_{t\in T}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem, gdzie $T \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem wówczas dla $p > 1$

$$(\mathbf{E}(\sup_{t\in T}|X_t|)^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-1}\sup_{t\in T}(\mathbf{E}|X_t|^p)^{1/p}.$$

2. Pokaż, że dla $a > 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t} W_s \geqslant at) \leqslant \exp(-a^2t/2).$$

3. Udowodnij, że jeśli $f$ jest funkcją ciągłą na $[0,\infty]$ wówczas

$$\int_0^t f(s)dW_s,\ \ (\int_0^t f(s)dW_s)^2 - \int_0^t f(s)^2ds,\ \ \exp(\int_0^t f(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2ds).$$

4. Udowodnij, że $N_t - ct$, $(N_t - ct)^2 - ct$ są martyngałami.

5. Niech $\triangle_n$ będzie ciągiem zagęszczającym podziałów odcinka $[0,t]$ oraz $\triangle_n \subset \triangle_{n+1}$ nadto $|\triangle_n| \to 0$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\sum_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = t,\ \ p.n.$$

6. Pokaż, że $\exp(\frac{\lambda W_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2t})$ jest martyngałem względem filtracji malejącej $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u,\ u \geqslant t)$.

7. Niech $\tau_a = \inf\{t > 0:\ W_t = a\}$, $\hat{\tau}_a = \inf\{t > 0:\ |W_t| = a\}$. Udowodnij, że

$$\mathbf{E}\exp(-\lambda\tau_a) = \exp(-a\sqrt{2\lambda}),\ \ \mathbf{E}\exp(-\lambda\hat{\tau}_a) = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}.$$

8. Pokaż, że dla $a < x < b$ zachodzi

$$\mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{b-x}{b-a},\ \ \mathbf{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x-a}{b-a}.$$

9. Niech $c, d$ będą liczbami dodatnimi, niech $\tau = \tau_c \wedge \tau_{-d}$. Pokaż, że

$$\mathbf{E}\exp(-\frac{s^2}{2}T) = \frac{\cosh(s(c-d)/2)}{\cosh(s(c+d)/2)}.$$

10. Pokaż, że dla $0 \leqslant s < \pi(c+d)^{-1}$,

$$\mathbf{E}\exp(\frac{s^2}{2}T) = \frac{\cos(s(c-d)/2)}{\cos(s(c+d)/2)}.$$

11. Pokaż, że $\tau_a$ jest niecałkowalne. Udowodnij, że

$$\mathbf{E}_x(\tau_a \wedge \tau_b) = (x-a)(b-x),$$

dla $x \in (a,b)$.

12. Niech $\sigma_a = \inf\{t :\ W_t < t - a\}$. Pokaż, że

$$\mathbf{E}\exp(\frac{1}{2}\sigma_a^2) = \exp(a).$$

13. Niech $\sigma_{a,b} = \inf\{t : W_t < bt - a\}$. Pokaż, że

$$\mathbf{E}\exp(\frac{1}{2}b^2\sigma_{a,b}) = \exp(ab).$$