ZADANIA Z PS1 – 6

W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera

1. Pokazać, że dla dowolnych dodatnich t, α, β

$$P(\sup_{s\le t} W_s > \beta + \frac{1}{2}\alpha t) \le e^{-\alpha\beta}.$$

Wsk. Skorzystać z zad. (5.6)

2. Pokazać, że następujące zdania są równoważne:

(a) $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$ p.n.

(b) $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1$ p.n.

(c) $\limsup_{t\to 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = 1$ p.n.

(d) $\liminf_{t\to 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log 1/t}} = -1$ p.n.

Własność procesu Wienera określoną przez warunki (a)–(d) nazywa się *prawem iterowanego logarytmu.*

3. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są i.i.d. o skończonej wartości oczekiwanej. Niech $S_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Pokazać, że $S_{n+1} = E(S_n | S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots)$. Wyprowadzić stąd mocne prawo wielkich liczb.

4. Dla $a \ne 0$, niech $\tau_a = \inf\{t : W_t = a\}$. Obliczyć $Ee^{-\lambda\tau_a}$, $\lambda > 0$ (jest to tzw. *transformata Laplace'a (rozkładu) zm. losowej* τ_a).
Wsk. Skorzystać z Zad. (5.6) i z tw. Dooba.

5. Pokazać, że jeśli τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}_+}$, takim że $E\tau < \infty$, to $EW_\tau = 0$, $EW_\tau^2 = E\tau$.
Wsk. Rozpatrzyć $W_{\tau\wedge n}$, $W_{\tau\wedge n}^2 - \tau\wedge n$, pokazać, że $W_{\tau\wedge n} \to W_\tau$ w L^2, gdy $n \to \infty$.

6. Dla $\alpha, \beta > 0$, niech $\tau = \inf\{t : |W_t| = \alpha\sqrt{\beta + t}\}$. Pokazać, że $E\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 1$ i wówczas $E\tau = \frac{\alpha^2\beta}{1-\alpha^2}$.

7. $T = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest ustaloną filtracją, a $X = (X_t)_{t\in T}$ jest adaptowanym, całkowalnym procesem, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że X jest (nad)martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $t \in T$ i dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ, takiego że $\tau \ge t$ zachodzi $EX_\tau = EX_t$ ($EX_\tau \le EX_t$ w przypadku nadmartyngału).

8. $T = \mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest (nad)martyngałem, prawostronnie ciągłym w przypadku czasu ciągłego. Pokazać, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ nie tylko $(X_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\in T}$, ale i $(X_{\tau\wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest także (nad)martyngałem.