ZADANIA Z PS1 – 5

1. W chwili $t = 0$ cząstka zaczyna ruch po osi X-ów w kierunku dodatnim, z prędkością 1. W chwili $t = 1$ rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł, cząstka kontynuuje swój ruch, jeżeli wypadnie reszka, zmienia kierunek ruchu, tzn. zaczyna poruszać się w lewo, z tą samą prędkością. Niech X_t oznacza położenie cząstki w chwili t, $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$. Sprawdzić, że $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+} \neq (\mathcal{F}_{t+}^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

2. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, $t > s \geq 0$. Pokazać, że
a) $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_s^X$,
b) gdy X jest prawostronnie ciągły, to $X_t - X_s$ jest niezależne od $\mathcal{F}_{s+}^X$.

Wsk. do b): Pokazać, że dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej f i $A \in \mathcal{F}_{s+}$ zachodzi $E(f(X_t - X_s)\mathbf{1}_A) = E(f(X_t - X_s))P(A)$.

3. τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ jest procesem adaptowanym, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Pokazać, że $\sigma := \inf\{n : n > \tau, X_n \in B\}$ jest momentem zatrzymania.

4. τ, σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Pokazać, że
a) $\{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$,
b) $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

Wsk. do a): Wygodniej rozpatrzyć $\{\tau > \sigma\}$.

5. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem o przyrostach niezależnych, $EX_t = 0$, $EX_t^2 < \infty$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Oznaczmy $Y_t = X_t^2 - EX_t^2$. Pokazać, że $(Y_t, \mathcal{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest martyngałem.

6. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ oznaczmy

$$Z_t^\lambda = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

Pokazać, że $(Z_t^\lambda, \mathcal{F}_t^W)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest martyngałem.