ZADANIA Z PS1 – 4

1. μ_n jest rozkładem Gaussa w $\mathbb{R}^d$ o wartości oczekiwanej m_n i macierzy kowariancji V_n, $n = 1, 2, \ldots$. Pokazać, że jeśli $\mu_n \Rightarrow \mu$ ($\Rightarrow$ oznacza zbieżność rozkładów), to μ jest rozkładem Gaussa o wartości oczekiwanej $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ i macierzy kowariancji $V = \lim_{n\to\infty} V_n$.

2. Udowodnić, że dla każdego $H \in (0,1)$ istnieje proces Gaussa $B^H = (B_t^H)_{t\in\mathbb{R}_+}$ o wartości oczekiwanej 0 i o funkcji kowariancji

$$K(s,t) = \frac{1}{2}\big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\big).$$

Wsk. Skorzystać ze wzoru (wyprowadzić go) $t^p = c_p \int_0^\infty \frac{1-\cos(tx)}{x^{p+1}} dx$, $t \geq 0$, $0 < p < 2$.
B^H nazywa się ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta H.

3. Pokazać następujące własności procesu B^H z poprzedniego zadania:
a) stacjonarność przyrostów (rozkład $B_t^H - B_s^H$ zależy tylko od $t - s$ dla $t > s$)
b) ma modyfikację ciągłą;
c) $(a^{-H} B_{at}^H)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest znowu ułamkowym ruchem Browna z parametrem H (samopodobieństwo).
d) Dla $H = 1/2$ proces B^H (ściślej, jego ciągła modyfikacja) jest procesem Wienera.

4. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Znaleźć funkcje wartości oczekiwanych i kowariancji następujących procesów Gaussa:
$X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0,1]$ (most Browna),
$Y_t = \alpha e^{-\alpha t} W_{e^{2\alpha t}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \alpha > 0$ (proces Ornsteina-Uhlenbecka),
$Z_t = W_{t+1} - W_t, \quad t \in \mathbb{R}_+$.
Pokazać, że procesy Y i Z są stacjonarne.