ZADANIA Z PS1 – 3

1. a) Niech $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie procesem o rozkładach skończenie wymiarowych takich jak proces Wienera. Pokazać, że wówczas X ma modyfikację spełniającą lokalnie (tzn. na każdym przedziale $[0,T]$) warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in (0,1/2)$.
b)Pokazać, że trajektorie procesu Wienera nie spełniają warunku Höldera z żadnym wykładnikiem $\alpha \geq 1/2$. Dokładniej,
$P(\exists_{[a,b]\subset\mathbb{R}_+}\exists_{\alpha\geq 1/2}\, W_.$ spełnia war. Höldera z wykładnikiem α na $[a,b]) = 0$.
Wsk do b). Dowód niewprost. Dla $\alpha = 1/2$ i ustalonego $[a,b]$ zdefiniować $t_{n,k} = a+(b-a)k/n$, $k = 0,1,\ldots n$ i rozpatrzyć $W_{t_{n,k+1}} - W_{t_{n,k}}$.

2. Pokazać, że jeśli ξ_λ ma rozkład Poiss(λ) i $\lambda \leq 1$, to dla każdego $p > 0$ istnieje $C_p > 0$, niezależne od λ, takie że $E\xi_\lambda^p \leq C_p\lambda$. Wywnioskować stąd, że w twierdzeniu Kołmogorowa o istnieniu modyfikacji ciągłej założenie: ....$\leq K|t-s|^{1+\varepsilon}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ jest istotne.

3. Zmienna losowa $(n+1)$-wymiarowa $(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ma rozkład Gaussa. Pokazać, że warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_0|\xi_1,\ldots,\xi_n)$ jest liniową funkcją $\xi_1,\ldots,\xi_n$.
Wsk. Pokazać, że ta warunkowa w. ocz. jest rzutem ortogonalnym w $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ na przestrzeń wszystkich liniowych kombinacji $\xi_1,\ldots,\xi_n$ i 1.

4. $(X_t)_{t\in[0,T]}$ jest procesem Gaussa o funkcji wartości oczekiwanych $m(t)$ i funkcji kowariancji $K(s,t)$. Pokazać, że każdy z następujących dwóch warunków wystarcza do tego, żeby proces miał modyfikację ciągłą:
a) $m(t) \equiv 0$ i istnieją $\gamma > 0, C > 0$, takie że $E(X_t - X_s)^2 \leq C|t-s|^\gamma$, $s,t \in [0,T]$;
b) $m(t)$ jest ciągła i istnieją $\gamma > 0, C > 0$, takie że $|K(s,t) - K(t,t)| \leq C|t-s|^\gamma$, $s,t \in [0,T]$.

5. Pokazać, że proces Gaussa $(X_t)_{t\in[0,1]}$ o wartości oczekiwanej 0 i funkcji kowariancji $K(s,t) = t\wedge s - ts$ ma modyfikację ciągłą.

6. $(V_t)_{t\in[0,1]}$ jest procesem Wienera na $[0,1]$. Pokazać, że $W_t = (1+t)V_{\frac{t}{1+t}} - tV_1$ jest procesem Wienera na $[0,\infty)$.

7. $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Pokazać, że następujące procesy są też procesami Wienera:
a) $(W_{t+h} - W_h)_{t\in\mathbb{R}_+}$, dla dowolnego $h \geq 0$;
b) $(-W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (odbicie);
c) $(cW_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ dla dowolnego $c > 0$ (przeskalowanie czasu lub samopodobieństwo);
d) $(W_1 - W_{1-t})_{t\in[0,1]}$;
e) $(\overline{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, gdzie $\overline{W}_0 = 0$, $\overline{W}_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ (inwersja czasu).
Wsk. do e): Zdarzenie $\{\lim_{t\to 0}\overline{W}_t = 0\}$ ma postać $\{\overline{W} \in \Gamma\}$, gdzie $\Gamma \in \sigma(\mathcal{C})$ w przestrzeni funkcji ciągłych na $(0,\infty)$.

8. Udowodnić, że $\lim_{t\to\infty}\frac{W_t}{t} = 0$ p.n.