ZADANIA Z PS1 – 2

1. Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu Poissona.

2. Znaleźć rozkłady skończenie wymiarowe procesu Wienera.

3. Pokazać, że w przestrzeni $C = C([0,1], \mathbb{R})$ z metryką $\rho(x,y) = ||x-y|| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|$ mamy $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(C)$.
Wsk. C jest ośrodkowa.

4. Procesy $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ i $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mają przyrosty niezależne i $\mathcal{L}(X_0) = \mathcal{L}(Y_0)$ oraz $\mathcal{L}(X_t - X_s) = \mathcal{L}(Y_t - Y_s)$ dla $t > s$ (oznaczenie: $\mathcal{L}(\xi) = P_\xi =$ rozklad ξ). Pokazać, że X i Y mają te same rozkłady skończenie wymiarowe.

5. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest Procesem Poissona z parametrem λ. Pokazać, że X jest nieodróżnialny od procesu o następujących własnościach:

a) trajektorie są funkcjami niemalejącymi o wartościach w $\mathbb{Z}_+$, o skokach $= 1$;

b) jeśli $\tau_1, \tau_2, \ldots$ oznaczają kolejne momenty skoków, to $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots$ są i.i.d. o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ.

Wsk. Niech $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie procesem Poissona skonstruowanym na wykładzie, niech $\mathcal{X}$= przestrzeń funkcji prawostronnie ciągłych i $\mathcal{C}$ = zbiór cylindrów w $\mathcal{X}$. Skorzystać z tego, że $P(X \in \Gamma) = P(N \in \Gamma)$ dla każdego $\Gamma \in \sigma(\mathcal{C})$.
Niech A będzie zdarzeniem, że zachodzi a). Pokazać, że $P(A \cap \{\tau_1 > t_1, \tau_2 - \tau_1 > t_2, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1} > t_n\}) = e^{-\lambda(t_1+\ldots+t_n)}$.

6. Pokazać, że w przestrzeni $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ zbiory $\{x \in \mathcal{X} : x$ jest funkcją niemalejącą$\}$, $\{x \in \mathcal{X} : \sup |x(t)| \leq 1\}$ nie należą do $\sigma(\mathcal{C})$.
Wsk. Pokazać najpierw, że jeśli $A \in \sigma(\mathcal{C})$, to istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $Z \subset \mathbb{R}_+$, taki że z faktu, iż $x \in A$ i $\forall_{t\in Z} x(t) = y(t)$ wynika $y \in A$.

7. T jest dowolnym zbiorem niepustym i dla każdego $t \in T$ μ_t jest rozkładem prawdopodobieństwa w $\mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje przestrzeń probabilistyczna i w niej funkcja losowa $(X_t)_{t\in T}$, taka że X_t ma rozkład μ_t i zmienne losowe $\{X_t\}_{t\in T}$ są niezależne.