ZADANIA Z PS1 – 1

1. Zmienne losowe $\rho_1, \rho_2, \ldots$ są niezależne, o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$, a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są niezależne o tym samym rozkładzie μ i są one także niezależne od $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Oznaczmy: $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \rho_1 + \ldots + \rho_k$ dla $k > 0$, $N_t = \sup\{k : \tau_k \le t\}$ dla $t \ge 0$ i

$$X_t = \begin{cases} \sum_{k \le N_t} \xi_k, & \text{gdy } N_t > 0 \\ 0, & \text{gdy } N_t = 0 \end{cases}.$$

(a) Pokazać, że proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ma przyrosty niezależne,
(b) Znaleźć rozkład $X_t - X_s$ dla $t > s$.
(Proces X nazywa się *złożonym procesem Poissona*)
Wsk. Skorzystać z lematu (udowodnionego na ćwiczeniach): Niech $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ będzie funkcją mierzalną, taką że $|h| \le 1$ i $h - 1$ ma nośnik ograniczony. Dla $\tau_1, \tau_2, \ldots$ j.w., zmienna losowa $\eta = \prod_{k=1}^{\infty} h(\tau_k)$ jest dobrze określona, całkowalna i

$$E\eta = e^{\lambda \int_0^\infty (h(s)-1)ds}.$$

2. (Inna konstrukcja procesu Poissona na $[0, a]$) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są i.i.d. o rozkładzie jednostajnym na $[0, a]$, a θ jest zm. losową o rozkładzie Poissona z parametrem λa, niezależną od $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Pokazać, że proces $X_t := \sum_{j=1}^{\theta} \mathbf{1}_{[0,t]}(\xi_j)$ $(= 0$, gdy $\theta(\omega) = 0)$, $t \in [0, a]$, jest procesem Poissona na $[0, a]$.

3. $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest procesem Wienera. Ustalmy dowolne $0 \le s < t$ i rozpatrzmy ciąg podziałów $s = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = t$, $n = 1, 2, \ldots$, przy czym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{j < m_n} (t_{j+1}^n - t_j^n) < \infty.$$

Pokazać, że

$$S_n = \sum_{j=0}^{m_n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 \to t - s, \qquad \text{gdy } n \to \infty, \tag{$*$}$$

z prawdopodobieństwem 1.
Wsk. Skorzystać z nierówności Czebyszewa i z lematu Borela–Cantelli.

4. Udowodnić, że trajektorie procesu Wienera mają z prawdopodobieństwem 1 wahanie nieskończone na każdym przedziale $[s, t]$. (tzn $\sup \sum_{j=0}^{m} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}| = \infty$, gdzie supremum jest brane po wszystkich podziałach $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t$, $m = 1, 2, \ldots$)

5. Proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest ciągły, $X_0 = 0$, ma przyrosty niezależne i załóżmy dla uproszczenia, że $E(X_t) = 0$, $E(X_t^4) < \infty$ dla wszystkich $t \ge 0$ (założenie to jest zbędne). Pokazać, że $X_t - X_s$ ma rozkład normalny dla wszystkich $t > s \ge 0$.
Wsk. Skorzystać z centralnego tw. granicznego i warunku Lindeberga.