Seria 9. Funkcjonały liniowe

1. Niech μ będzie skończoną miarą borelowską na $[0,1]$. Wykaż, że funkcjonał dany wzorem $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)d\mu(x)$ jest ciągły na $C[0,1]$ i policz jego normę.
2. Dla $x \in [0,1]$, niech $\delta_x(f) = f(x)$. Udowodnij, że
   (a) δ_x jest ciągłym liniowym funkcjonałem na $C[0,1]$ o normie 1.
   (b) Jeśli $(x_n)_{n=1}^N$ jest skończonym ciągiem różnych punktów z $[0,1]$, to dla dowolnych liczb a_n,
   $$\| \sum_{n=1}^N a_n \delta_{x_n} \|_{C[0,1]^*} = \sum_{n=1}^N |a_n|.$$
   (c) Wykaż, że b) zachodzi dla $N = \infty$ przy założeniu $\sum_n |a_n| < \infty$.
3. Wykaż, że dla $f \in L^1[0,1]$ funkcjonał φ_f na $C[0,1]$ zadany wzorem $\varphi_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ jest ciąły oraz $\|\varphi_f\| = \|f\|_1$.
4. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem takim, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in l_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.
5. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$.
6. Załóżmy, że $f_n \in L_2[0,1]$ są takie, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L_2[0,1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$?