Seria 8. Funkcjonaly liniowe

1. Wykaż, że przestrzeń unormowana X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy ma przeliczalny podzbiór liniowo gęsty.

2. Wykaż, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$ to istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.

3. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. Wykaż, że dla dowolnego $x \in X$,
$$\mathrm{dist}(x, F) = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1, x^*|F = 0\}.$$

4. Wykaż, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

5. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami rzeczywistej przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykaż, że istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x)$.

6. Niech X będzie przestrzenią Bancha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\triangle(x) := \{x^* \in X^* : x^* = 1 = \|x^*\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.

7. Podaj przykłady $x \in l_1$ takie, że $\triangle(x)$ jest jednopunktowe, n-wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.

8. Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\triangle(x)$ jest jednopuntkowe.

9. Przestrzeń $C[0,1]$ mozna traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty[0,1]$ Funkcjonał $\delta_x(f) = f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0,1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L_\infty[0,1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L_1[0,1]$ $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnij, że jeśli $f \in L_\infty[0,1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

10. Jaka jest norma funkcjonału $\varphi(f) = \int_0^1 e^x f(x)dx$ na $L_p(0,2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$?

11. Dla jakich p z przedziału $[1,\infty]$ wzór $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/3} x_n$ zadaje ciągły funkjconał na l_p?