Seria 7. Transformata Fouriera

1. Udowodnij, że jeśli $f \in L_1$ i $f > 0$, to $|\bar{f}(y)| < \bar{f}(0)$ dla każdego $y \neq 0$.

2. Oblicz transofrmatę Fouriera g_n - funkcji charakterystycznej przedziału $[-n, n]$. Wykaż, że transformata Fouriera $g_n * g_1$ jest transformatą pewnej funkcji f_n z L_1, która z dokładnością do stałej ma postać
$$f_n(x) = \frac{\sin x \sin nx}{x^2}.$$
Zauważ, że $\|f_n\|_1 \to \infty$ i wywnioskuj stąd, że $f \to \bar{f}$ przekształca L_1 na podzbiór właściwy C_0-funkcje ciągłe znikające w nieskończoności.

3. Oblicz granicę
$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{\sin(t\lambda)}{t} e^{itx} dt.$$

4. Podać przyklad funkcji $f \in L_2$ takiej, że $f \in L_1$ ale $\bar{f} \in L_1$.

5. Pokaż, że jeśli dla $f \in L_1$ mamy $\int |t\bar{f}(t)|dt < \infty$, to funkcja f pokrywa się z funkcją różniczkowalną, której pochodna wynosi $-i \int_{-\infty}^{\infty} t\bar{f}(t)e^{ixt}dt$.

6. Zalóżmy, że $f \in L_1$, f-jest rózniczkowalna prawie wszędzie oraz $f' \in L_1$. Czy wówczas $\bar{f}' = -ti\bar{f}(t)$.

7. Niech S oznacza kalsę funkcji takich, że $|x^n D^m f(x)| \leqslant A_{mn}(x)$ dla $m, n = 0, 1, 2, ...$ Wykaż, że transforamata Fouriera przekstałaca zbiór S na siebie.

8. Pokaż, że jeśli $f \in L_p$, $g \in L_q$ (p, q-sprzężone) i $h = f * g$, to h jest funkcją jednostajnie ciągłą. Jeżeli $1 < p < \infty$, to $h \in C_0$ co może nie mieć miejsca dla $p = 1$.

9. Wykaż, że jeśli $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$ oraz
$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt,$$
to $g \in C_0$. Co mozna powiedzieć o g jeśli $f \in L_\infty$.

10. Udowodnij wzór sumacyjny Poissona
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\beta) = \alpha \sum^{\infty} \varphi(n\alpha),$$
gdzie $\alpha\beta = 2\pi$, natomiast
$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx.$$

11. Biorąc funkcję $f(x) = e^{-|x|}$ w poprzedni zadaniu pokaż, że
$$\frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}.$$

12. Oblicz transformatę $f_c(x) = \exp(-cx^2)$.