Seria 6. Przestrzenie Hilberta

1. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi,\pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$, przy czym ciąg jest zbieżny w L^2. Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$?
2. Jak wygląda odpowiednie rozwinięcie w szereg Fouriera dla funkcji nieparzystych?
3. Niech $r_k := \mathrm{sgn}(\sin(2^k \pi x))$, $k = 1, 2, ...$ będzie układem Rademachera. Dla skończonych niepustych zbiorów $A \subset \{1, 2, ...\}$ określamy $w_A = \prod_{k\in A} r_k$ oraz kładziemy $w_\emptyset = 1$. Wykaż, że $(w_A)_A$ jest bazą o.n. w $L^2[0,1]$.
4. Niech μ będzie miara skończoną na $[0,1]$, która nie jest skupiona na zbiorze skończonym. Wykaz, że istnieje baza ortonormalna $(f_n)_{n\geqslant 0}$ przestrzeni $L^2[0,1]$, taka, że f_n jest wielomianem stopnia n.
5. Niech $(f_i(x))_i$ i $(g_j(y))_j$ będa ukladami ortonormalnymi w $L^2(X,\mu_1)$, i $L^2(X,\mu_2)$ odpowiednio. Wykaż, że
   (a) układ $(f_i(x)g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(X \times Y, \mu_1 \otimes \mu_2)$.
   (b) Jeśli układy $(f_i)_i$, $(g_j)_j$ są zupelne, to układ $(f_i g_j)_{i,j}$ tez jest zupełny.
6. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenia przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykaż, że
   (a) każda bazę o.n. M da się rozszerzyć na $\mathcal{H}$.
   (b) jeśli $(u_i)_{i\in I}$ jest bazą M, to rzut ortogonalny na M ma postac
   $$P_M x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i \rangle u_i.$$
7. Wykaż, że przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^n)$ jest ośrodkowa i wywnioskuj stad ośrodkowość przestrzeni $L_2(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^n$. Czy przestrzenie $L_2(A)$ i $L_2(B)$ są izometryczne?
8. Dla jakich p przestrzenie l_p są ośrodkowe?
9. Wyznacz p dla których $L_p[0,1]$ jest ośrodkowa.
10. Czy przztrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa? A przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych na $(0,1)$ z norma supremum?