Seria 5. Podprzestrzenie liniowe

1. Wykaż, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest domknięta.
2. Załóżmy, że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sa dwoma σ-ciałami podzbiorów X, a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że:
   (a) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
   (b) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla dowolnego $A \int \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
   (c) P_M jest nieujemny, $P_M f \geqslant 0$, μ-p.n., jeśli $f \geqslant 0$, μ-p.n.
3. Znajdź ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w $L^2[-1, 1]$.
4. Znajdź wielomian stopnia 2 taki, że $\int_{-1}^{1} |t^4 - w(t)|^2$ jest najmniejsza.
5. Wykaż, że układ Rademachera $f_n = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, ...$ jest układem ortogonalnym $L^2[0, 1]$. Czy jest to układ zupełny?
6. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1], \quad n \geqslant 0.$$

   (a) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L^2[-1, 1]$. Jak go trzeba znormalizować by był ortonormalny?
   (b) Czy to jest układ zupełny?
7. Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad t \geqslant 0, \quad n \geqslant 0.$$

   (a) Wykaż, że L_n jest układem ortogonalnym w $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t} dt)$. Czy jest to układ ortonormalny.
   (b) Czy to jest układ zupełny.
8. Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}), \quad n \geqslant 0.$$

   (a) Wykaż, że H_n jest układem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt)$.
   (b) Czy to jest układ zupełny.