Seria 4. Przekształcenia liniowe

1. Zbadaj ciąglosć i oblicz normę przekształcenia $T : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x})$.

2. Na przestrzeni $C^k[0,1]$, $k \geqslant 1$ definiujemy normę $\max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t)|$. Udowodnij ciągłość i oblicz normę następujących funkcjonałów na $C^k[0,1]$:

   (a) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(t)dt$,

   (b) $\varphi(f) := f'(1/2)$,

   (c) $\varphi(f) = f(1) - f(0)$.

3. Niech $M := \{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$: Niech $g(t) = t$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$?

4. Niech $M := \{f \in L_1[0,1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$: Niech $g(t) \equiv 1$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?

5. Niech $M := \{f \in L_2[-1,1] : \ f(x) = f(-x)\} \subset L_2[-1,1]$. Znajdź $M^\perp$ i rzut ortogonalny na M.

6. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2[0,1]$ składającą sie z funkcji stałych na $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 1, 2, ..., n$.

   (a) Znajdź $V_n^\perp$.

   (b) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n.

   (c) Znajdź odleglość $f(t) = t$ w $L_2[0,1]$ od V_n.

7. Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ jest zadana przez iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ dla wszystkich x, y.