Seria 3. Przekształcenia liniowe

1. Oblicz normę $\mathrm{id} : l_p^n \to l_q^n$ dla $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.
2. Określamy $T : l_1 \to c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Wykaż że T jest ciągłe i oblicz jego normę.
3. Znajdź normę przekształcenia $f(x) \to xf(x)$ z $L_p[-1,1]$ w $L_1[-1,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
4. Niech $g \in L_\infty(X, \mu)$ wykaż, że przeskztałcenie T dane wzorem $Tf(x) := g(x)f(x)$ jest ciągłym operatorem na $L_p(X, \mu)$. Ile wynosi jego norma?
5. Niech $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$, wykaż, że T jest ciągłym przekształceniem z $L_p[0,1]$ w $L_q[0,1]$ dla dowolnych $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.
6. Wykaż, że $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funkcjonałem na $C[0,1]$ i policz jego normę.
7. Niech $X := \{f \in C[0,1] : f(t) = 2f(1-t), t \in [0,1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowdnij, że następujące funkcjonały sąciągłe na X i policz ich normy:
   (a) $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x)dx$,
   (b) $\varphi(f) = f(\frac{1}{4})$,
   (c) $\varphi(f) = f(\frac{3}{4})$.