Seria 2. Przestrzenie Banacha

1. Wykaż, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.
2. Niech A będzie gwiaździstym względem zera, pochłaniającym podzbiorem przestrzeni liniowej X, którego przecięcia z każdą prostą są domknięte. Określmy $p_A(x) := \inf\{t > 0 : x/t \in A\}$. Kiedy p_A jest normą na X?
3. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią, wykaż, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X.
4. Wykaż, że jeśli zbiór A jest wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, to zbiory $\bar{A}$, $\mathrm{int}(A)$ też są wypukłe.
5. Dla zbioru A w przestrzeni liniowej X określamy
$$\mathrm{conv}(A) = \bigcap\{B : \ B \text{ wypukłe}, \ A \subset B\}.$$
Wykaż, że
   (a) $\mathrm{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zwierającym A.
   (b) $\mathrm{conv}(A) := \{x = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j : \ a_j \in A, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j, n = 1, 2, ...\}$
6. Niech $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie funkcją wypukłą taką, że $\varphi(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Określamy
$$l_\varphi := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \ \exists t > 0, \ \sum_n \varphi(|x_n|/t) < \infty\}.$$
oraz
$$\|x\|_\varphi := \inf\{t > 0 : \sum_n \varphi(|x_n|/t) \leqslant 1\}, \quad \text{dla } x \in l_\varphi.$$
Wykaż, że l_φ z normą $\|x\|_\varphi$ jest przestrzenią Banacha.
7. Niech $x = (x_k)_{n=1}^\infty$ oraz $1 \leqslant p < q$.
   (a) $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$ dla $1 \leqslant p < q$.
   (b) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p \leqslant \|x\|_\infty$
   (c) Czy stałe w pierwszym punkcie są optymalne
8. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leqslant p < q$.
   (a) $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ dla $1 \leqslant p < q$.
   (b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
   (c) Czy zawsze $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$?
9. Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{i=1}^\infty |x_i| \leqslant 1\}$ jest domkniętym wypuklym podzbiorem l_2 o pustyn wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?
10. Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miara skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X. Udowodnij, że dla $1 \leqslant p < q$,
   (a) $\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$, gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi ronowść.
   (b) Znajdź funkcję $f \in L_p(0, 1)$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.
   (c) Znajdź funkcję $f \in L_q[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.