Seria 10. Operatory Zwarte

1. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha Xi Y. Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

2. Niech X będzie przzstrzenią Banacha. Wykaż, że przekształcenie liniowe $T : X \to C[0,1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in [0,1]$, $x \to Tx(t)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

3. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) = (P_1x, P_2x) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y.

4. Załóżmy, że X, Y i Z są przestrzeniami Bancha, zaś $B : X \to Z$ oraz $C : Y \to Z$ są ciągłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y.

5. Niech $(e_n)_{n\geqslant 0}$ będzie kanoniczną bazą w l_p. Wykaz, że operator liniowy $T : l_p \to l_p$ taki, że $Te_n = a_ne_n$ jest zwarty wtedty i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. Czy operator przesunięcia w prawo na l_p jest zwarty?

7. Niech $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$. Czy jest to operator zwarty?

8. Określmy $T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

9. Wykaż, że $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, TB_X da się pokryć skończoną liczbą kul w Y o promieniu ε.

10. Wykaż, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń $Y_\varepsilon \subset Y$ taka, że $\dim Y_\varepsilon < \infty$ oraz $\operatorname{dist}(T(B_X), Y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

11. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią Banacha $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T \in B(X, l_p)$ jest zwarty, to istnieje ciąg skończenie wymiarowych operatorów T_n taki, że $\|T_n - T\| \to 0$.