Seria 1. Przestrzenie Banacha

1. Które z poniższych przestrzeni są prestrzeniami unormowanymi (metryka zadana przez normę)
   (a) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = \operatorname{arc\,tg}|x-y|$;
   (b) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sum_{i=1}^{3}|x_i - y_i| + \max_{i\geqslant 4}|x_i - y_i|$;
   (c) $X = C[0,1]$, $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x) - f(y)|$;
   (d) $X = C[0,1]$, $d(f,g) = |f(0) - g(0)|$;
   (e) $X = C[0,1]$, $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$;
   (f) $X = C^1[0,1]$, $d(f,g) = |f(0) - g(0)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x) - g'(x)|$.
2. Które z przestrzni z poprzedniego zadania są zupełne?
3. Naszkicuj kulę jednostkową w przestzeniach l_1^2, l_2^2, l_∞^2, l_1^3, l_2^3, l_∞^3.
4. Dwie metryki d_1, d_2 są rownoważne jeśli definiują te same topologie (czyli np. ciągi w obu metrykach mają te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$
$$cd_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant Cd_1(x,y), \quad \text{dla każdego } x,y \in X, \tag{1}$$
   to metryki są równoważne.
5. Wskaż dwie rownoważne metryki, które nie spełniają (1).
6. Mówimy, że dwie normy są rownoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są róznoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że
$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$
   dla wszystkich $x \in X$.
7. Wskaż dwie nierownoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.
8. Udowodnij że istnieje tylko jedna przestrzeń liniowo-topologiczna na $\mathbb{R}^n$ to znaczy nie da się wprowadzić alternatywnej topologii liniowej.
9. Wykaż, że wszystkie normy w $\mathbb{R}^n$ są rownoważne.
10. Czy istnieje przestrzeń X i dwie nierownoważne normy wprowadzające na X strukturę przestrzeni Banacha.