Seria 8. Łańcuchy Markowa

1. Jeśli $(a(n))$, $(b(n))$ są dodatnimi ciągami takimi, że $b(n) \to b(\infty) < \infty$, kiedy $n \to \infty$ oraz $\sum a(j) < \infty$, to
$$a * b(n) \to b(\infty) \sum_{j=0}^{\infty} a(j) < \infty, \quad n \to \infty.$$

2. Zbiór $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ nazywamy regularnym jeśli X jest ψ-nieredukowalne oraz
$$\sup_{x \in C} \mathbf{E}_x \tau_B < \infty, \quad B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}).$$
Pokaż, że na przeliczalnej przestrzeni stanów dodatniość łańcucha (powracalność + istnienie skończonej miary niezmienniczej) i regulraność są rónoważne.

3. Pokaż, że jesli istnieje osiągalny atom $\alpha \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, to
   (a) Jeśli X jest dodatni wtedy istnieje dekompozycja $\mathcal{X} = S \cup N$, gdzie S jest pełny pochlaniający a X obciety do S jest regularny.
   (b) Łańcuh X jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}_x \tau_\alpha < \infty$ dla każdego $x \in \mathcal{X}$.

4. Niech X będzie ψ-nieredukowalny. Wówczas dodatniość łańcucha jest rownoważna istnieniu dekompozycji $\mathcal{X} = S \cup N$, gdzie S jest pełny pochłaniający i taki, że X obcięty do S jest regularny.

5. Udowodnij formułę Dynkina. Niech $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, ..., X_k)$ oraz $Z_k(X_0, ..., X_k) = Z(X_k)$. Dla dowolnego momentu stopu τ (wg $(\mathcal{F}_k)$) definujemy
$$\tau_n = \min(n, \tau, \inf\{k \geqslant 0, Z_k \geqslant n\}).$$
Pokaż, że
$$\mathbf{E}_x Z_{\tau_n} = \mathbf{E}_x Z_0 + \mathbf{E}_x (\sum_{i=1}^{\tau_n} \mathbf{E}(Z_i | \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}).$$

6. Pokaż, że dla dowolnych ciągów funkcji dodatnich $(g_k, f_k : k \geqslant 0)$ mamy
$$\mathbf{E}(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) \leqslant Z_k - f(X_k) + g_k(X_k)$$
Zatem dla momentu stopu τ
$$\mathbf{E}_x (\sum_{k=0}^{\tau-1} f_k(X_k)) \leqslant Z_0(x) + \mathbf{E}_x (\sum_{k=0}^{\tau-1} g_k(X_k)).$$

7. Pokaż, że jeśli $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ i V spełnia warunek dryfu $\triangle V(x) \leqslant -1 + b 1_C(x)$, to
$$\mathbf{E}_x \tau_C \leqslant V(x) + b 1_C(x), x \in C.$$