

### Seria 5. Łańcuchy Markowa

1. Niech  $P$  będzie macierzą przejścia błędzenia przypadkowego na  $\mathbb{Z}_+$ , takiego, że  $P(0,0) = p$  oraz

$$\begin{aligned} P(x, x-1) &= p, & x > 0 \\ P(x, x+1) &= q, & x \geq 0, \end{aligned}$$

gdzie  $p + q = 1$ . Pokaż, że jeśli  $p \geq q$ , to  $L(0,0) = 1$ , czyli łańcuch jest powracający.

2. Niech  $X$  będzie nieredukowalnym błędzeniem przypadkowym na  $\mathbb{Z}$ . Pokaż, że jeśli rozkład  $\Gamma$  zmiennych  $\{W_n\}$  ma średnią 0, to łańcuch jest powracający.
3. Pokaż, że jeśli  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  jest jednostajnie przechodni tak, że  $U(x, A) \leq M$  dla  $x \in A$ , to  $U(x, A) \leq 1 + M$  dla każdego  $x \in \mathcal{X}$ .
4. Jeśli zbiór  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  spełnia  $L(x, A) = 1$  dla każdego  $x \in A$ , to  $A$  jest powracający. Jeśli dodatkowo  $X$  jest  $\psi$ -nieredukowalny, to  $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{X})$  oraz  $U(x, A) = \infty$  dla każdego  $x \in \mathcal{X}$ .
5. Jeśli zbiór  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  spełnia  $L(x, A) \leq \varepsilon < 1$  dla  $x \in A$ , to  $U(x, A) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$  dla  $x \in \mathcal{X}$ , zatem  $A$  jest jednostajnie przechodni.
6. Niech  $\tau_A(k)$  oznacza  $k$ -ty powrót do  $A$ . Przypuśćmy, że dla pewnego  $m$

$$\mathbf{P}_x(\tau_A(m) < \infty) \leq \varepsilon < 1, \quad x \in A;$$

wówczas  $U(x, A) \leq 1 + m/(1 - \varepsilon)$  dla  $x \in \mathcal{X}$ .

7. Pokaż, że jeśli  $B \xrightarrow{a} A$  dla pewnego rozkładu  $a$ , wtedy z faktu, że  $A$  jest jednostajnie przechodni wynika, że  $B$  również ma tę własność.
8. Pokaż, że jeśli  $D^c$  jest zbiorem pochłaniającym oraz  $L(x, D^c) > 0$ , dla wszystkich  $x \in D$ , to  $D$  jest przechodni.
9. Pokaż korzystając z warunku dryfu, że jeśli rozkład  $\Gamma$  w błędzeniu na  $\mathbb{Z}_+$  ma ograniczony nośnik to łańcuch jest powracający.
10. Pokaż, że jeśli średnia w rozkładzie  $\Gamma$  o kończonym nośniku jest różna od zera to łańcuch jest przechodni.
11. Pokaż, że w błędzeniu na  $\mathbb{Z}_+$  przy rozkładzie  $\Gamma$  o kończonym nośniku łańcuch jest powracający wtedy i tylko wtedy gdy średnia jest niedodatnia.
12. Pokaż, że jeśli w błędzeniu na  $\mathbb{R}_+$  średnia w rozkładzie  $\Gamma$  jest ujemna, wtedy łańcuch jest powracający.
13. Pokaż, że jeśli w błędzeniu na  $\mathbb{R}_+$  średnia w rozkładzie  $\Gamma$  jest równa 0, a wariancja jest skończoną liczbą dodatnią, wtedy łańcuch jest powracający.
14. Pokaż, że jeśli w błędzeniu na  $\mathbb{R}_+$  średnia w rozkładzie  $\Gamma$  jest dodatnia, a nośnik ograniczony, wtedy łańcuch jest przechodni.