Seria 4. Łańcuchy Markowa

1. Pokaż, że dla rekurencji generowanej przez rozkład odnowienia $p(n)$, $n = 1, 2, ...$ okresem łańcucha jest $d = \text{NWD}\{n : \ p(n) > 0\}$. Nadto jeśli w przypadku ciąglym jeśli F jest rozciągający to δ-szkielet V_δ^+ jest nieokresowy dla dostatecznie małego δ.

2. Niech $\mathsf{X} = \{X_n\}$ będzie zadany przez $X_k = F(X_{k-1}, W_k)$, gdzie F jest gładką funkcją $F : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^p \to \mathcal{X}$, natomiast $\mathcal{X}$ stanowi otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$. Nadto $W = \{W_k\}$ jest ciągiem i.i.d. o rozkładzie Γ. Pokaż, że X jest słabo Fellerowski.

3. Błądzenie przypadkowe jest zawsze słabo Fellerowskie. Dodatkowo jest mocno Fellerowskie wtedy i tylko wtedy gdy Γ jest absolutnie ciągłe wg. miary Lebesgue'a.

4. Pokaż, że bładzenie przypadkowe na półprostej jest ψ-nierdukowlnym T-łańcuchem jeśli $\Gamma(-\infty, 0) > 0$.

5. Pokaż, że błądzenie przypadkowe jest T-łańcuchem wtedy i tylko wtedy gdy Γ jest rozciagające.

6. Powiemy, że model LCM(F,G): $x_{k+1} = Fx_k + Gu_{k+1}$, F- macierz $n \times n$, G maceirz $n \times p$ jest kontrolowalny jeśli dla każdej pary stanów $x_0, x^* \in \mathcal{X}$, istnieje $m \in \mathbb{Z}_+$ oraz ciąg zmiennych $(u_1^*, ..., u_m^*) \in \mathbb{R}^p$ takich, że $x_m = x^*$, kiedy $(u_1, ..., u_m) = (u_1^*, ..., u_m^*)$ (przy warunku poczatkowym x_0). Pokaz, że LCM(F,G) jest kontrolowalny jesli para (F, G) spelnia warunek, że macierz
$$C_n := [F^{n-1}G|...|FG|G],$$
ma rangę n.

7. Pokaż, że jeśli LCM(F,G) na $\mathbb{R}^n$ spełnia warunke kontolowalności oraz Γ jest niesingularny względem miary Lebsegue'a to n-szkielet tego procesu jest T-łańcuchem.

8. Model (SETAR). Niech
$$X_n = \phi(j) + \theta(j)X_{n-1} + W_n(j) \ \text{ dla } \ X_{n-1} \in R_j,$$
gdzie $-\infty = r_0 < r_1 < ... < r_M = \infty$, a $R_j = (r_{j-1}, r_j]$, nadto dla każdego j zmienne $\{W_n(j)\}$ stanowią ciąg i.i.d. o średniej 0 (i rozkladzie $W(j)$) taki, że $\{W_n(i)\}$ są niezalezne dla $i \neq j$. Bedziemy zakładać, że zmienne $W(j)$ mają gęstość dodatnia na całej prostej rzeczywsitej. Pokaż, że taki model (SETAR) jest φ-nieredukowalnym T-łańcuchem, gdzie za φ można przyjąć miare Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

9. Model (SLM). Proces X nazywamy prostym modelem liniowym jeśli
$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$
Zmienne $W = \{W_n\}$ mają rozkład Γ. Pokaż, że (SLM) jest e-łańcuchem jesli $|\alpha| \leqslant 1$.

10. (Dla ambitnych) Pokaż, że łańcuch $X_{n+1} = \sqrt{X_n} W_{n+1}$, $n \in Z_+$, gdzie $W = \{W_n\}$ jest określony na $\mathbb{R}_+$ a rozkład Γ posiada pierwszy moment nie jest e-łańcuchem mimo, że jest Fellerowski.