Seria 3. Łańcuchy Markowa

1. Udowdnij, że jeśli $\Gamma(-\infty, 0) > 0$, to każdy zbiór $[0, c]$, $c \in \mathbb{R}_+$ jest mały.

2. Będziemy mówić, że rozkład Γ ma własność rozciągania jeśli pewien splot Γ^{n*} jest niesingularny wzgledem miary Lebesgue'a μ. Pokaż, że jeśli błądzenie przypadkowe ma własność rozciągania wtedy istnieje otoczenie $C_\beta = \{x : |x| \leqslant \beta\}$ punktu 0, ktore jest ν_{2n}-small, where $\nu_{2n} = \varepsilon\mu 1_{[s,t]}$ for some interval $[s, t]$, and some $\varepsilon > 0$.

3. (Dla ambitnych) Udowdnij, że jeśli dodatkowo założymy, że $\Gamma(-\infty, 0) > 0$ oraz $\Gamma(0, \infty) > 0$ wtedy X (błądzenie przypadkowe) jest μ-nieredukowalne i każdy zbiór zwarty jest mały.

4. Kolejka GI/G/I. Definujemy łańcuch $\{X_n\}$ na $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ z p-stwami przejścia

$$\begin{aligned}
&P(i, x; j \times A) = 0, \quad j > i + 1 \\
&P(i, x; j \times A) = \Lambda_{i-j+1}(x, A), \quad j = 1, ..., i + 1 \\
&P(i, x; 0 \times A) = \Lambda_i^*(x, A),
\end{aligned}$$

gdzie Λ_i są substochastycznymi funkcjami pstwami przejścia. Przykładem tej konstruckji może być $X_n = (N_n, R_n)$, gdzie R_n jest resztkowym czasem obslugi w chwili $T_n'+$. Niech $Z_n = S_0 + ... + S_n$, (gdzie $S_i \sim H$) $R_t = Z_{N(t)+1} - t$, gdzie $N(t) = \sup\{n : Z_n \leqslant t\}$. Jeśli $R_0 = x$ to $Z_1 = x$, niech

$$P_n^t(x, y) = P(Z_n \leqslant t < Z_{n+1}, R_t \leqslant y | R_0 = x)$$

pstwo że proces odnowienia n-czasow obsługi zakończy się w czasie $[0, t]$ oraz że czas resztkowy aktualnej obsługi w chwili t jest w przedziale $[0, y]$, zakładając, że $R_0 = x$. Pokaż, że

$$\Lambda_n(x, [0, y]) = \int_0^\infty P_n^t(x, y) G(dt)$$

oraz

$$\Lambda_n^*(x, [0, y]) = (\sum_{j=n+1}^{\infty} \Lambda_j(x, [0, \infty])) H[0, y].$$

5. Pokaż, że dla łańcucha X z poprzedniego punktu $\{0 \times [0, \beta]\}$ zbiór $\{0 \times [0, \beta]\}$ jest ν_1-maly, gdzie $\nu_1(\cdot)$ jest dane przez $G(\beta, \infty)H(\cdot)$.

6. Rekurencja 'naprzód'. Niech $V_\delta^+ = V^+(n\delta)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, gdzie $V^+(t) := \inf\{Z_n - t : \quad Z_n \geqslant t\}$, $Z_n - \sum_{i=0}^n Y_i$, $Y_1, Y_2, ...$ mają ten sam rozkład Γ, Y_0 niezależne od pozostałych Γ_0. Pokaż, że jeśli rozkład Γ jest rozciągający, to dla dostatecznie małego δ odcinek $[0, \delta]$ jest małym zbiorem.

7. Definiujemy lniowy model Gaussowski. Niech

$$X_{k+1} = FX_k + GW_{k+1},$$

gdzie F jest $n \times n$ macierzą, a G jest $n \times p$ macierzą; X_k ma wartości w $\mathbb{R}^n$, W_k w $\mathbb{R}^p$; X_0 jest dowolne. Nadto zakładamy, że $W \sim \mathcal{N}(0, I)$, gdzie I jest $p \times p$ macierza identycznowściową. Pokaż, że jeśli macierz G jest pełnej rangi p, wtedy łańcuch jest μ-(Lebesgue'a) nierdukowalny. Pokaż, że pewna kula otwarta jest małym zbiorem dla tego łańcucha.

Do domu zadanie 4,5 oraz zadanie z wykładu o istnieniu $p^n(x, y)$-regularnej pochodnej miary $P^n(x, dy)$ wg $\psi(dy)$ poza zbiorem $y \in N$, ψ-miary 0, tzn. zbiór N jest wspólny dla wszystkich gęstości $p^n(x, y)$.