Seria 2. Łańcuchy Markowa

1. Błądzenie przypadkowe na półprostej $X_n = [X_{n-1} + W_n]_+$, gdzie W_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach $\mathbb{Z}$. Oblicz $P(x,y), P(x,0)$. Pokaż, że jeśli $\mathbf{P}(W_n < 0) > 0$ to z dowolnego stanu $x \in \mathbb{Z}_+$ dojdziemy z niezerowym p-stwem do 0. Zauważ, że jeśli $\mathbf{P}(W_n < 0) = 0$ wówczas nie da się osiągnąć stanu 0 spoza tego stanu. Czy mozna znaleźć zmienną W taką, że przestrzeń stanów składa się z dwóch zbiorów pochłaniających?

2. Rozważmy proces odnowienia, to znaczy niech $\{Y_0, Y_1, Y_2, ...\}$ będą zmiennymi iid z rozkładu na $\mathbb{N}$, definujemy proces $Z_n = \sum_{i=0}^{n} Y_n$. Niech $p(n)$ będzie funkcja p-stwa dla Y_i. Definiujemy

   $$r = \sup(n : \ p(n) > 0).$$

   Przez rekurencję wstepującą będziemy nazywać proces

   $$V^+(n) := \inf(Z_m - n : Z_m > n), \quad n \geqslant 0.$$

   Pokaż, że zbiór $A = \{1, 2, ..., r\}$ jest pochlaiający oraz, że łańcuch zredukoway do A jest nieredukowalny.

3. Model kolejek. Definiujemy model GI/G/1 w którym:

   (a) Klienci przybywają do systemu w niezależnych odtępach czasu $T_1, T_2, T_3, ...$ o tym samym rozkladzie zmiennej T, to znaczy $\mathbf{P}(T \leqslant t) = G(-\infty, t]$. Klienci będą pojawiac się w chwilach $T_0' = T_0 = 0$, $T_1' = T_0 + T_1$,$T_2' = T_0 + T_1 + T_2$,...

   (b) n-ty Klient wymaga obsługi zajmującej S_n czasu, gdzie S_n pochodzą z tego samego rozkladu zmiennej S, to znaczy $\mathbf{P}(S_n \leqslant t) = H(-\infty, t]$. Zatem łączny czas obsługi n-klientów wynosi $S_i' = S_0 + S_1 + ... + S_i$.

   (c) Klienci obsługiwani są przez jeden serwer w kolejności zgłoszeń.

   Niech $N(t)$ będzie liczbą klientów przebywających w systemi w chwili t. Niech nadto N_n będzie liczbą klientów w systemie tuż przed chwila T_n', czyli $N(T_n'-)$. Pokaż, że bez dodatkowych załozeń o H, N_n nie musi być łańcuchem Markowa.

4. Pokaż, że jeśli $H(-\infty, t] = 1 - e^{-\mu t}$, $t \geqslant 0$, wówczas N_n jest łańcuchem Markowa. Oblicz p-stwa przejścia. Taki model nazywa się GI/M/1.

5. W analogiczny sposób definiujemy N_n^* liczbę klientów tuż po chwili T_n' z wykładniczym rozkladem czasów obsługi. Taki model nazywamy M/G/1. Znajdź p-stwa przejścia w tym modelu.

6. Udwodnij że modele GI/M/1 i M/G/1 są nieredukowalne na $\mathbb{Z}_+$.

7. Nieograniczone błądzenie przypadkowe na $\mathbb{Z}$. Niech d będzie NWD $\{n : \Gamma(n) > 0\}$. Pokaż, że każdy ze zbiorów $D_r = \{md + r : \ m \in \mathbb{Z}\}$ jest pochłaniający. Pokaż, że jeśli $\Gamma(-\infty, 0) > 0$ i $\Gamma(0, \infty) > 0$ to łańcuch jest nieredukowalny po obcięciu do D_r.

8. Znajdź funkcję przejścia dla błądzenia losowego na półprostej. Pokaż, że błądzenie na półprostej jest φ-nierdukowalne dla $\varphi(0, \infty) = 0$, $\varphi(\{0\}) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

   $$\mathbf{P}(W < 0) = \Gamma(-\infty, 0) > 0.$$

   Nadto w tym przypadku jeśli C jest zwarte, to $C \mapsto \{0\}$.

9. Nieograniczone błądzenie przypadkowe. Niech rozkład Γ procesu W ma rozklad absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a, która jest dodatni i odzielona od zera w środku układu współrzędnych.