

Zadania przygotowawcze z RP2.

**Zad 1.** Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem  $a > 0$  to znaczy mającym gęstość

$$g(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

Udowodnij, że ciąg zmiennych

$$Y_n := \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

jest zbieżny do zmiennej  $1/Z$ , gdzie  $Z$  ma rozkład wykładniczy z pewnym parametrem.

**Zad 2.** Korzystając z CLT wyznaczyć granicę

$$e^{-n} \left( 1 + \frac{n}{1!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right)$$

**Zad 3.** Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym  $\mathcal{U}(-1, 1)$ . Rozstrzygnąć czy istnieje zmienna losowa  $Y$  niezależna od  $X$  taka, że  $X + Y$  i  $2Y$  mają takie same rozkłady.

**Zad 4.** Niech  $\mathcal{F}_n$  będzie filtracją, zaś  $X_n$  ciągiem zmiennych adaptowalnych do tej filtracji. Rozstrzygnąć, które z poniższych zmiennych są momentami zatrzymania:

1.  $\tau_1 := \inf\{n : X_n < 0\}$ ;
2.  $\tau_2 := \inf\{n : X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq 1\}$ ;
3.  $\tau_3 := \inf\{n : X_n > X_{n-1}\}$ ;
4.  $\tau_4 := \inf\{n : X_n = X_{n+1}\}$ .

**Zad 5.** Student  $X$  jeden z piętnastu zdających egzamin, zna odpowiedzi na 10 pytań z 30, które są wylosowywane przez kolejno zdających studentów i które nie są powtórnie używane. Student  $X$  wie jakie pytania są zostały już wylosowane. Jaka jest optymalna strategia (w którym momencie wejść na egzamin)

**Zad 6.** Rzucamy kostką tak długo aż pojawi się 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się przed 66? Jaka jest średnia długość czasu trwania zabawy (liczba rzutów)?