

Zadania z RP2. Seria 9. **Momenty zatrzymania.**

Zad 1. Niech τ będzie momentem zatrzymania. Czy wynika stąd, że momentem zatrzymania jest a) $\tau + 1$, b) $\tau - 1$, c) τ^2 ?

Zad 2. Udowodnić, że $\tau \equiv s$ jest momentem zatrzymania względem dowolnej filtracji.

Zad 3. Niech τ_1, τ_2 będą momentami zatrzymania. Udowodnić, że $\tau_1 \wedge \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$ są momentami zatrzymania.

Zad 4. Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}[0, 1]$. Niech $\tau = \inf\{n : X_1 + \dots + X_n \geq 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.

Zad 5. Udowodnić, że \mathcal{F}_τ jest σ -ciałem; jeśli $\tau = t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

Zad 6. Wykazać, że jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{F}$ i dla każdego $t \in T$ mamy $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$. Niech τ i σ będą momentami zatrzymania. Wykazać, że każde

$$\{\tau < \sigma\}, \{\tau > \sigma\}, \{\tau \leq \sigma\}, \{\tau \geq \sigma\}, \{\tau = \sigma\}.$$

Zad 7. Udowodnić, że jeśli $\tau_1 \leq \tau_2$, to $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zad 8. Podać przykład na to, że $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zad 9. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych Bernoulliego, $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Pokaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

Zad 10. Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.