Zadania z RP2. Seria 8. **Centralne Twierdzenie Graniczne.**

Zad 1. Niech X będzie zmienną losową spełniającą warunki:

1. $\mathbf{E}X^2 < \infty$.
2. Jeśli Y i Z są niezależnymi kopiami X, to $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$.

Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Zad 2. Udowodnić, że jeśli zmienne losowe X_n $n = 1, 2, ...$ są niezależne o jednakowym rozkładzie, $\mathbf{E}X_n = 0$, $\mathbf{E}X_n^2 = \sigma^2$, f-jest funkcją różniczkowalną w zerze, to

$$\sqrt{n}(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma f'(0)^2),$$

gdzie $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.

Zad 3. Zmienne $X_1, X_2, ...$ są niezależne i $\mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X = -k) = \frac{1}{2}$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}^2 X_k$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{s_n}.$$

Zad 4. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne i mają rozkłady $\mathcal{U}(-a_k, a_k)$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}^2 X_k$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{s_n},$$

jeśli (a) ciąg (a_k) jest ograniczony i $s_n \to \infty$; (b) jeśli $\sum a_k^2 < \infty$.

Zad 5. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne i symetryczne,

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}(1 - k^{-2}), \quad \mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = \frac{1}{2}k^{-2}.$$

Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu $(S_n/\sqrt{n})$, gdzie $S_n = X_1 + ... + X_n$. Co można powiedzieć o wariancjach zmiennych losowych $S_n/\sqrt{n}$.

Zad 6. Zmienna X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zbadać zbieżność według rozkładu zmiennych $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$, gdy $\lambda \to \infty$.

Zad 7. Zmienna losowa X_n ma rozkład $\chi^2(n)$. Wykazać, że $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

Zad 8. Niech $S_n = X_1 + ... + X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 1. Rozpatrując zmienną $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_-$ Udowodnić wzór Stirlinga.