

Zadania z RP2. Seria 7. **Centralne Twierdzenie Graniczne.**

**Zad 1.** Sprawdź, że jeśli  $X, X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie  $\mathbf{E}X = 0$ ,  $\mathbf{D}^2X = 1$  i  $X_{n,k} = X_k/\sqrt{n}$ , to schemat serii  $(X_{n,k})$  spełnia warunek Lindenberg'a.

**Zad 2.** Udowodnić, że warunek Lapunowa: dla wszystkich  $n, k \in \mathbb{N}$  i dla pewnego  $\delta > 0$  zachodzi  $\mathbf{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$  oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0,$$

pociąga za sobą warunek Lindenberg'a.

**Zad 3.** Udowodnić, że gdy  $X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że  $|X_n| \leq K < \infty$ ,  $n = 1, 2, \dots$  oraz  $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}^2X_k \rightarrow \infty$ , to ciąg  $(X_n)$  spełnia warunek Lindenberg'a (to znaczy, że warunek L. jest spełniony dla schematu serii  $(X_{n,k})$ , gdzie  $X_{n,k} = X_k$ , dla  $k \leq n$ ).

**Zad 4.** Jacek założył się z Plackiem, że w 100 rzutach kostką uzyska w sumie nie mniej niż 400 oczek i w tym celu rozpoczął losowanie. Ile rzutów po 100 serii musi średnio wykonać, żeby doczekać się takiego wyniku?

**Zad 5.** Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (lub wypłaty)  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, 100$ , gdzie  $X_i$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie zerowej średniej i średniej wariancji równej  $100^2$ . Ile gotówki trzeba mieć w kasie rano, żeby z p-stwem 0.99 na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy. Zakładamy, że w ciągu dnia naczelnik dokłada pieniądze ze swojej kieszeni, ale na koniec dnia chce odzyskać pieniądze.

**Zad 6.** Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć przybliżenie p-stwa, że suma oczek będzie pomiędzy 3410 a 3590.

**Zad 7.** Dane są niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie  $X, X_1, X_2, \dots$  i  $\mathbf{E}X = 0$ ,  $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}^2X < \infty$ . Wyznaczyć w zależności od  $a, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{|X_1 + \dots + X_n|}{n^\alpha} > a\right).$$

**Zad 8.** W Polsce jest 24.6 mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla  $i$ -tego podatnika jest zmienną losową  $X_i$ , gdzie  $\mathbf{E}X_i = 0$ ,  $\mathbf{D}^2X_i = 100^2$ , czyli  $\sqrt{\mathbf{D}^2X_i} = 100$  (złotych); Ponadto zakładamy niezależność zmiennych  $X_i$ . Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?