Zadania z RP2. Seria 6. **Funkcje charakterystyczne.**

Zad 1. Niech S^1 będzie okręgiem (np. $|z|=1$). Pokaż, że miara $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{z^n}$, gdzie z jest liczbą zespoloną o module 1 taką, że $z^n \neq 1$ dla żadnego $n>0$, zbiega do rozkładu jednostajnego na okęgu.

Zad 2. (Twierdzenie Riemana-Lebesgue'a.) Udowodnić, że gdy X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym to $\varphi_X(t)\to 0$, gdy $t\to\infty$.

Zad 3. Pokaż, że splot dwóch rozkładów singularnych może być rozkłdem ciągłym. To znaczy znaleźć dwie zmienne X,Y o rozkładach singularnych takie, że $X+Y$ ma rozkład ciągły.
Wskazówka Zauważ, że

$$\frac{\sin(t)}{t}=(\prod_{i=1}^{\infty}\cos(2^{-2n+1}t))(\prod_{i=1}^{\infty}\cos(2^{-2n}t))$$

Zad 4. Znajdź funkcje charakterystyczną taką, że $\mathrm{Re}\varphi=|\varphi|^2$.

Zad 5. (Twierdzenie Sheppa) Udowodnij, że jeśli X,Y są niezależne, to $\mathbf{E}|X+Y|\geqslant\mathbf{E}|X-Y|$.

Zad 6. Pokaż, że zmienne $X_1,...,X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\varphi_{X_1,...,X_n}(t_1,....,t_n)=\varphi_{X_1}(t_1)...\varphi_{X_n}(t_n).$$

Zad 7. Podaj przykład wektora (X,Y) takiego, że X,Y są zależne ale mimo, to $\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$.
Wskazówka Np. rozkład o gęstości

$$g(x,y)+\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))1_{\{|x|<1\}}1_{\{|y|<1\}}.$$

Zad 8. Niech $X,X_1,X_2,...$ będą zmiennymi o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Udowodnij, że $X_n\xrightarrow{D}X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle t,X_n\rangle\xrightarrow{D}\langle t,X\rangle$, dla każdeo $t\in\mathbb{R}^d$.

Zad 9. Pokaż, że zachodzi wzór na tarnsformatę odwrotną. To znaczy jeśli rozkład μ ma całkowalną funkcję charakterystyczną, to ma także ograniczoną gęstość taką, że

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}\varphi(s)ds.$$

Użyj tego faktu do policzenia transformaty rozkładu Cauchy'ego $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.