Zadania z RP2. Seria 5. **Funkcje charakterystyczne.**

Zad 1. Udowodnij CTG w przypadku, gdy $X_1, X_2, ...$, jest ciągiem i.i.d takim, że $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{D}^2X_1 = 1$. To znaczy, korzystając z funkcji charakterystycznych pokaż, że $\frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X$, gdzie X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Zad 2. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $a_n \to a$, $b_n \to b$, to $a_nX_n + b_n \xrightarrow{d} aX + b$.

Zad 3. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X_0$, $Y_n \xrightarrow{d} Y_0$, gdzie X_n, Y_n są niezależne, to $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X_0 + Y_0$.

Zad 4. Pokaż, że jeśli $X = \sum_{n=0}^{\infty} U_n/2^n$, gdzie U_n jest ciągiem i.i.d Bernouliego, to X ma rozkład jednostajny na $[0,1]$.

Zad 5. Pokaż, że jeśli zmienna X o rozkładzie normalnym jest sumą dwóch zmiennych niezależnych Y i Z, to Y, Z mają rozkład normalny.

Zad 6. Pokaż, że $\varphi(x) = \frac{2}{1+e^{x^2}}$ nie jest funkcją charakterystyczną.

Zad 7. Udowodnić, że $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$, dla $\alpha > 2$ nie jest funkcją charakterystyczną.

Zad 8. Udowodnić, że każda funkcja φ parzysta, przedziałami liniowa, wypukła na $[0,\infty)$ i taka, że $\varphi(0) = 1$ jest funkcją charakterystyczną.

Zad 9. Udowodnić, że każda funkcja φ przysta, wypukła na $[0,\infty)$ i taka, że $\varphi(0) = 1$ jest funkcją charakterystyczną. W szczególności $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$, $\alpha \leqslant 1$ jest funkcją charakterystyczną.

Zad 10. Na odcinek $[-n,n]$ rzucono losowo (zgodnie z rozkładem jednostajnym) n gwiazd o masach jednostkowych. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu sił grawitacji w punkcie 0 $(r/|r|^{\beta+1})$. Dla jakich β istnieje rozkład graniczny (przy $n \to \infty$)

Definicja 1 *Niech $X, X_1, X_2...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie μ. Rozkład μ nazywamy stabilnym, gdy dla każdego n istnieją stałe $a_n > 0$ i b_n, dla których*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \sim a_nX + b_n.$$

Okazuje się, że $a_n = n^{1/\alpha}$, gdzie $\alpha \in (0,2]$. Dla danego α rozkład nazywamy α-stabilnym. Np. rozkład Cauchy'ego jest 1-stabilby, rozkład normalny jets 2-stabilny.