Zadania z RP2. Seria 4. **Funkcje charakterystyczne.**

Zad 1. Policz funkcje charakterystyczne rozkładów:

1. Jednopunktowego δ_a;
2. Dwupunktowego $p\delta_a + q\delta_b$, $p + q = 1$, $p, q \geqslant 0$;
3. Geometrycznego;
4. Bernouliego ($\mathcal{B}(n, p)$);
5. Poissona ($\mathcal{P}(\lambda)$).

Zad 2. Zmienne losowe X, Y, U, V są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Obliczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych a) XY, b) X^2, c) X/Y, d) $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$, e) $XY + UV$.

Zad 3. Udowodnić, że dla funkcji charakterystycznej φ rozkładu μ następujące warunki są równoważne

1. $\varphi(s) = 1$, dla pewnego $s \neq 0$;
2. φ ma okres s;
3. rozkład μ jest skupiony na zbiorze punktów postaci $2\pi k/s \in \mathbb{Z}$.

Zad 4. Udowodnić, że zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. $|\varphi(t)| < 1$ dla wszystkich $t \neq 0$;
2. $|\varphi(s)| = 1$ i $|\varphi(t)| < 1$ dla wszystkich $t \in (0, s)$. Wtedy $|\varphi|$ ma okres s i rozkład μ jest skupiony na zbiorze punktów postaci $b + 2\pi k/s$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $|\varphi(t)| = 1$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $\varphi(t) = e^{itb}$ i μ jest skupiony w punkcie b.

Zad 5. Policz funkcje charakterystyczne rozkładów

1. Rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$;
2. Jednostajny $\mathcal{U}(0, a)$;
3. Jednostajny $\mathcal{U}(-a, a)$;
4. Wykładniczy $\mathcal{E}(\lambda)$;
5. Dwustronny wykładniczy;
6. Cauchy'ego;
7. Gamma;
8. Cosinus hiperboliczny.

Zad 6. Zbadać, czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi pewnego rozkładu (znaleźć ten rozkład). a) $\cos t$, b) $\cos^2 t$, c) $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, d) $\frac{1+\cos(t)}{2}$ e) $(2-e^{it})^{-1}$

Zad 7. Jeśli $\varphi_1, \varphi_2, ...$ są pewnymi funkcjami charakterystycznymi, a $\sum p_i = 1$, $p_i > 0$, $i = 1, 2...$, to również to również kombinacja $\sum p_i \varphi_i$ jest funkcją charakterystyczną.

Zad 8. Zmienne $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależne i mają tę samą funkcję charakterystyczną φ. Niech N będzie zmienna losową o rozkładzie Poissona, niezależną od X_i. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną $X_1 + ... + X_N$.

Zad 9. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie μ. Czy funkcjami charakterystycznymi są: a) φ^2, b) $\mathrm{Re}\varphi$, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$.

Zad 10. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.